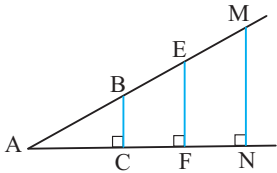


# نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات یکی از مباحث شیرین و پرکاربرد ریاضی است که در اولین برخورد کمی با آدم غریبی می‌کند و در عین حال، تا زمانی که قصد دارید ریاضی بخوانید ول کنتان نیست پس سعی کنید از همین درس اول، با مثلثات دوست شوید.



کتاب درسی ریاضی ۱، داستان نسبت‌های مثلثاتی را بر مفهوم تشابه بنا کرده است. وقتی دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. در این صورت نسبت اضلاع متناظر دو مثلث با هم برابر است. هنگام صحبت در مورد نسبت‌های مثلثاتی، با مثلث‌های قائم‌الزاویه کار داریم. در شکل مقابل، از نقاط مختلف ضلع بالایی زاویه بر ضلع دیگر این زاویه عمود کرده‌ایم تا مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شود. این مثلث‌ها با هم متشابه‌اند. چون زاویه A در همه آن‌ها مشترک است و علاوه بر آن یک زاویه قائمه مساوی هم دارند. نسبت تشابه را به شکل‌های مختلف می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{MN}{AM} = \dots \quad (\text{نسبت اضلاع مقابل } \hat{A} \text{ به وتر})$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{AN}{AM} = \dots \quad (\text{نسبت اضلاع مجاور } \hat{A} \text{ به وتر})$$

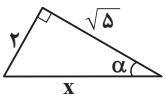
$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{AF} = \frac{MN}{AN} = \dots \quad (\text{نسبت اضلاع مقابل } \hat{A} \text{ به مجاور آن})$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{EF} = \frac{AN}{MN} = \dots \quad (\text{نسبت اضلاع مجاور } \hat{A} \text{ به مقابل آن})$$

در واقع هر یک از چهار نسبت بالا برابر با مقداری ثابت است که آن‌ها را به ترتیب سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویه A می‌نامیم.

## نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

**مثال** در شکل زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را بیابید.



$$x^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

پاسخ

$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

**مثال** در هر یک از موارد زیر، مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه فرض شده

است. با استفاده از جدول و اطلاعات داده شده، مجهول‌ها را بیابید.

	$23^\circ$	$40^\circ$
سینوس	$0/4$	$0/64$
کسینوس	$0/9$	$0/76$
تانژانت	$0/4$	$0/84$

الف)  $a = 3, b = 2, \tan \hat{C} = ?$

ب)  $a = 9, c = \sqrt{17}, \sin \hat{B} = ?$

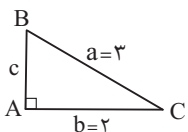
ج)  $b = 1, c = 2, \sin \hat{B} + \cos \hat{C} = ?$

د)  $\hat{C} = 23^\circ, a = 5, b = ?$

ه)  $\hat{B} = 40^\circ, a = 5, b = ?$

و)  $\hat{C} = 40^\circ, b = 5, a = ?$

پاسخ

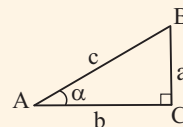


الف)  $\tan \hat{C} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{c}{b} = \frac{c}{2}$

c را به کمک رابطه فیثاغورس به دست می‌آوریم:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

پس  $\tan \hat{C} = \frac{\sqrt{5}}{2}$



برای زاویه‌ای مانند  $\alpha$  از یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

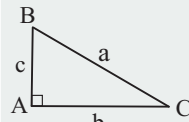
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} = \frac{b}{a}$$

همان‌طور که می‌بینید، تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگر می‌باشند.

### یک توضیح گیج‌کننده

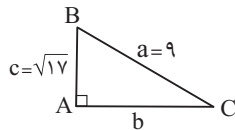
رأس‌های یک مثلث را با حروف بزرگ انگلیسی و طول ضلع‌ها را با حروف کوچک انگلیسی نشان می‌دهیم. a طول ضلع مقابل به رأس A، b طول ضلع مقابل به رأس B و c طول ضلع مقابل به رأس C است.



چون ما آدم‌ها ذاتاً تنبل هستیم، خیلی وقت‌ها حالش را نداریم مثلاً بگوییم «طول ضلع AB» و به جای آن می‌گوییم «ضلع AB». AB یک ضلع است، یک

پاره‌خط و طول آن یک عدد مثبت است. (طول ضلع AB را با |AB| نشان می‌دهیم.) در واقع در این‌گونه موارد از صنعت «مجاز» استفاده می‌کنیم! یعنی مجازیم که مجازاً به جای «طول ضلع AB» بگوییم «ضلع AB» و شنونده باید عاقل باشد!!

داستان رأس و زاویه هم این‌طوری است. خیلی وقت‌ها حالش را نداریم زاویه A را با  $\hat{A}$  نشان دهیم و با همان A نشان می‌دهیم! رأس A است و  $\hat{A}$  زاویه. البته اگر واژه «زاویه» را به کار ببریم همان‌آی خالی درست است: «زاویه A».

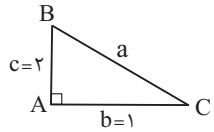


$$\sin \hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} = \frac{b}{9}$$

(ب)

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9^2 - (\sqrt{17})^2 = 81 - 17 = 64 \Rightarrow b = \sqrt{64} = 8$$

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{8}{9}$$



$$\sin \hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a}$$

(ج)

$$\sin \hat{B} + \cos \hat{C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

از طرفی:

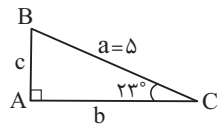
$$\sin \hat{B} + \cos \hat{C} = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

پس:

یک سؤال: چرا  $\sin \hat{B}$  با  $\cos \hat{C}$  مساوی شد؟

جواب: چون این دو زاویه متمم‌اند. اگر دو زاویه متمم باشند (جمعشان  $90^\circ$  شود)، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است. همیشه! کمی جلوتر، این مطلب

را جدی می‌گیریم!

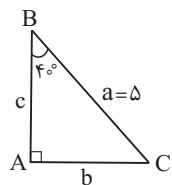


$$\cos \hat{C} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos 23^\circ = \frac{b}{a}$$

(د)

با توجه به جدول،  $\cos 23^\circ$  تقریباً  $0.9$  است. پس:

$$0.9 = \frac{b}{5} \Rightarrow b = 4.5$$

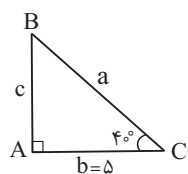


$$\sin \hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin 40^\circ = \frac{b}{a}$$

(ه)

با توجه به جدول،  $\sin 40^\circ$  تقریباً  $0.64$  است. پس:

$$0.64 = \frac{b}{5} \Rightarrow b = 3.2$$



$$\cos \hat{C} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos 40^\circ = \frac{b}{a}$$

(و)

با توجه به جدول،  $\cos 40^\circ$  تقریباً  $0.76$  است. پس:

$$0.76 = \frac{5}{a} \Rightarrow a = 6.57$$

### تغییرات نسبت‌های مثلثاتی

**مثال** با رسم شکل‌های مناسب، به سؤالات زیر جواب دهید.

(الف) وقتی اندازه یک زاویه حاده زیاد می‌شود، اندازه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی آن چه تغییری می‌کند؟

(ب) اگر زاویه‌ای به صفر نزدیک شود، هر یک از نسبت‌های مثلثاتی آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(ج) اگر زاویه‌ای به  $90^\circ$  درجه نزدیک شود، هر یک از نسبت‌های مثلثاتی آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

**پاسخ الف)** ربع دایره مقابل به شعاع  $r$  را در نظر بگیرید. ما فعلاً نسبت‌های مثلثاتی را فقط در مثلث قائم‌الزاویه می‌شناسیم، پس برای رسیدن به سینوس

و کسینوس  $\theta$ ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای روی شکل می‌سازیم که  $\theta$  یک زاویه آن باشد. حالا در مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده، داریم:

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{y}{x}$$

اگر زاویه  $\theta$  بزرگ شود، ضلع مقابل آن بزرگ‌تر و ضلع مجاورش کوچک‌تر می‌شود. یعنی با افزایش  $\theta$ ،  $y$  زیاد و  $x$  کم می‌شود. برای درک

این مطلب، شکل مقابل را نگاه کنید. اول،  $\theta_1$  و  $x_1$  و  $y_1$  را داریم، بعد با افزایش زاویه به  $\theta_2$  و  $x_2$  و  $y_2$  رسیده‌ایم. دقت کنید که چون

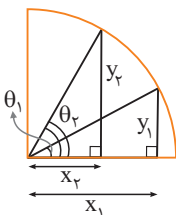
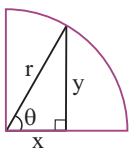
در ربع دایره قرار داریم، وتر مثلث قائم‌الزاویه ثابت مانده است.

$$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow \langle y_2 > y_1 \quad , \quad x_2 < x_1 \rangle$$

از طرفی، گفتیم  $\sin \theta = y$  و  $\cos \theta = x$ . پس با افزایش  $\theta$ ،  $y$  و در نتیجه  $\sin \theta$  زیاد می‌شود اما  $x$  و در نتیجه  $\cos \theta$  کم می‌شود.

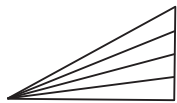
$$\theta \uparrow \Rightarrow y \uparrow \xrightarrow{\sin \theta = y} \sin \theta \uparrow$$

$$\theta \uparrow \Rightarrow x \downarrow \xrightarrow{\cos \theta = x} \cos \theta \downarrow$$



در مورد تانژانت هم، وقتی اندازه زاویه حاده زیاد می‌شود، طول ضلع مقابل آن افزایش می‌یابد و طول ضلع مجاورش کم می‌شود. کسری که صورتش زیاد و مخرجش کم می‌شود، افزایش می‌یابد:

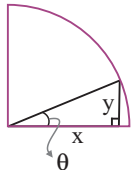
$$\theta \uparrow \Rightarrow \langle y \uparrow, x \downarrow \rangle \Rightarrow \frac{y}{x} \uparrow \Rightarrow \tan \theta \uparrow$$



یک جور دیگر هم می‌شد فهمید تانژانت زیاد می‌شود؛ شکل روبه‌رو را ببینید:

در این شکل، وقتی اندازه زاویه حاده بزرگ می‌شود، ضلع مجاورش ثابت می‌ماند و ضلع مقابلش زیاد می‌شود. پس چون تانژانت، نسبت ضلع مقابل به مجاور است، تانژانت هم زیاد می‌شود. داستان کتانژانت، برعکس است!

ب) وقتی  $\theta$  به صفر نزدیک می‌شود،  $y$  به صفر و  $x$  به شعاع دایره یعنی ۱ نزدیک می‌شود. پس  $\sin \theta$  به صفر و  $\cos \theta$  به یک نزدیک می‌شود. اگر نزدیک شدن به صفر را با « $\rightarrow 0$ » و نزدیک شدن به ۱ را با « $\rightarrow 1$ » نشان دهیم، می‌توانیم حرف‌های بالا را این‌طوری بنویسیم:



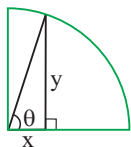
$$\theta \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \xrightarrow{\sin \theta = y} \sin \theta \rightarrow 0$$

$$\theta \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 1 \xrightarrow{\cos \theta = x} \cos \theta \rightarrow 1$$

هم‌چنین وقتی زاویه به صفر نزدیک می‌شود، طول ضلع روبه‌روی آن هم به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین تانژانت زاویه به صفر نزدیک می‌شود.

کتانژانت، هی بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. حرکت تانژانت به سمت صفر  $\Rightarrow$  به سمت صفر  $\rightarrow$  ضلع مقابل = تانژانت به سمت ۱  $\rightarrow$  ضلع مجاور

ج) وقتی  $\theta$  به  $90^\circ$  نزدیک می‌شود،  $y$  به شعاع دایره یعنی ۱ و  $x$  به صفر نزدیک می‌شود. پس  $\sin \theta$  به یک و  $\cos \theta$  به صفر نزدیک می‌شود.



$$\theta \rightarrow 90^\circ \Rightarrow y \rightarrow 1 \xrightarrow{\sin \theta = y} \sin \theta \rightarrow 1$$

$$\theta \rightarrow 90^\circ \Rightarrow x \rightarrow 0 \xrightarrow{\cos \theta = x} \cos \theta \rightarrow 0$$

برای تانژانت چه اتفاقی می‌افتد؟ تانژانت به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شود! چون مدام بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و بی‌حد و مرز از هر عددی که فکرش را بکنید، می‌تواند بزرگ‌تر شود، چون ضلع مقابل زاویه بزرگ می‌شود و ضلع مجاورش همین‌طور کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به سمت صفر می‌رود. پس نسبت ضلع مقابل به مجاور هم هی قد می‌کشد! کتانژانت به صفر نزدیک می‌شود.

### مثال زاویه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$1^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 35^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 85^\circ, 89^\circ$

الف) زاویه‌ها را برحسب اندازه سینوس آن‌ها (از کوچک به بزرگ) مرتب کنید.

ب) زاویه‌ها را برحسب اندازه کسینوس آن‌ها (از کوچک به بزرگ) مرتب کنید.

ج) زاویه‌ها را برحسب اندازه تانژانت آن‌ها (از کوچک به بزرگ) مرتب کنید.

د) سینوس کدام زاویه به صفر نزدیک‌تر است؟ سینوس کدام زاویه به ۱ نزدیک‌تر است؟

ه) کسینوس کدام زاویه به صفر نزدیک‌تر است؟ کسینوس کدام زاویه به ۱ نزدیک‌تر است؟

و) سینوس کدام زاویه بزرگ‌تر از ۱ است؟ کسینوس کدام زاویه کوچک‌تر از صفر است؟

### پاسخ

الف) زاویه‌ها از چپ به راست برحسب اندازه سینوسشان (از کوچک به بزرگ) مرتب هستند!

ب) باید زاویه‌ها را از بزرگ به کوچک بچینیم:

$1^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 35^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 85^\circ, 89^\circ$

ج) زاویه‌ها از چپ به راست برحسب اندازه تانژانتشان (از کوچک به بزرگ) مرتب هستند.

د) سینوس  $1^\circ$  به صفر و سینوس  $89^\circ$  به ۱ نزدیک است.

ه) کسینوس  $89^\circ$  به صفر و کسینوس  $1^\circ$  به ۱ نزدیک است.

### یک‌کم جمع‌بندی

وقتی زاویه حاده‌ای بزرگ می‌شود (و هم‌چنان حاده می‌ماند)، سینوس و تانژانت آن افزایش و کسینوس آن کاهش می‌یابد.

وقتی زاویه حاده‌ای به صفر نزدیک می‌شود، سینوس و تانژانت آن به صفر و کسینوس آن به ۱ نزدیک می‌شود.

وقتی زاویه حاده‌ای به  $90^\circ$  نزدیک می‌شود، سینوس آن به ۱ و کسینوس آن به صفر نزدیک می‌شود اما تانژانت آن سر به فلک می‌گذارد، یعنی خیلی بزرگ می‌شود و به سمت ناکجاآباد (همان بی‌نهایتی که در فصل اول گفتیم) می‌رود.

نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه حاده مثبت است. تانژانت یک زاویه حاده هر عدد مثبتی می‌تواند باشد، اما سینوس و کسینوس آن حتماً بین صفر و یک است. (کلاً سینوس و کسینوس بیشتر از ۱ و کم‌تر از -۱ نمی‌شوند).

بیشتر بدانیم:

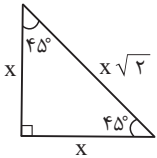
$\sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1, \tan 0^\circ = 0, \cot 0^\circ$  تعریف نشده است. هم‌چنین  $\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \tan 90^\circ$  تعریف نشده است و  $\cot 90^\circ = 0$ .

این‌ها را گفتیم که مطالب بالا را بهتر درک کنید!

و) سینوس هیچ زاویه‌ای بزرگ‌تر از ۱ نیست! همچنین چون همه زاویه‌ها حاده‌اند، کسینوس همه آن‌ها مثبت است و در بین زاویه‌های داده شده، زاویه‌ای که کسینوسش کوچک‌تر از صفر باشد، یافت می‌نشود! گفت آن چه یافت می‌نشود آنم آرزوست!  
عجب سؤالی بود! همه‌اش سرکاری!!

### سه زاویه معروف!

**مثال** در یک حرکت ضربتی (!) با رسم شکل‌های مناسب، نسبت‌های مثلثاتی سه زاویه معروف  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  درجه را حساب بفرمایید.

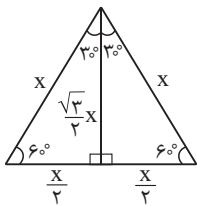


**پاسخ** یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم، یعنی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول دو ضلع قائم‌الزاویه آن با هم مساوی است و به کمک آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $45^\circ$  را حساب می‌کنیم. ما طول هر یک از این دو ضلع را یک عدد دلخواه و مثبت مانند  $x$  می‌گیریم. با توجه به رابطه فیثاغورس، مجذور طول وتر می‌شود  $x^2 + x^2 = 2x^2$ ، پس طول وتر  $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$  است.

هم‌چنین در هر مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه‌ای که روبه‌روی دو ساق (دو ضلع مساوی) هستند، با یکدیگر مساوی‌اند. ما اندازه هر یک از این زاویه‌ها را  $\alpha$  می‌گیریم. حالا چون مجموع زاویه‌های هر مثلث  $180^\circ$  است،  $\alpha + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$  و در نتیجه  $2\alpha = 90^\circ$ ، یعنی  $\alpha = 45^\circ$ . پس هر کدام از زاویه‌های حاده مثلث  $45^\circ$  اند. اطلاعاتی که روی شکل بالا پیاده شده‌اند، با همین استدلال‌ها به‌دست آمده‌اند. حالا می‌رویم سراغ اصل مطلب، یعنی محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $45^\circ$  به کمک شکل بالا. فرقی نمی‌کند کدام زاویه  $45^\circ$  را انتخاب کنید. ده بیست سی چهل کنید و یکی را انتخاب نمایید. این هم ادامه داستان:

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x}{x} = 1$$



و حالا برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $30^\circ$  و  $60^\circ$  درجه، یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌کشیم؛ سه ضلع هر مثلث متساوی‌الاضلاع با هم مساوی‌اند. طول هر یک از این سه ضلع را عدد دلخواه و مثبت  $x$  می‌گیریم. چون ما نسبت‌های مثلثاتی را فعلاً فقط در مثلث قائم‌الزاویه می‌شناسیم، یک ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شود. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه هم هست. پس این ارتفاعی که رسم کردیم ضلع مقابل را که طولش  $x$  بود نصف می‌کند و دو پاره‌خط به طول  $\frac{x}{2}$  می‌سازد. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، نیمساز هم است. پس این ارتفاعی که رسم کردیم، زاویه مثلث را که  $60^\circ$  است (در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، هر زاویه  $60^\circ$  است)، نصف می‌کند و دو تا زاویه  $30^\circ$  می‌سازد. این همه در مورد این ارتفاع بیچاره حرف زدیم، اما هنوز طولش را حساب نکرده‌ایم! برای رسیدن به طول این ارتفاع در یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه، فیثاغورس می‌زنیم:

$$(\text{ارتفاع})^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow (\text{ارتفاع})^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow \text{ارتفاع} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

اطلاعاتی که روی شکل پیاده شده‌اند، با همین جان‌کنندن‌ها به‌دست آمده‌اند. حالا همه چیز برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $30^\circ$  و  $60^\circ$  درجه آماده است. یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه را انتخاب کنید و داستان زیر را بخوانید!

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

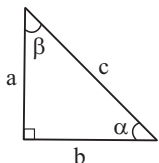
**مثال** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  زاویه‌های حاده یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، نشان دهید:

$$\cos \alpha = \sin \beta \quad (\text{ب})$$

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad (\text{الف})$$

$$\cot \alpha = \tan \beta \quad (\text{د})$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \quad (\text{ج})$$



حالا نسبت‌های مثلثاتی لازم در هر قسمت را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{الف)} \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل } \alpha}{\text{طول وتر}} = \frac{a}{c} \\ \cos \beta = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \beta}{\text{طول وتر}} = \frac{a}{c} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\text{ب)} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول وتر}} = \frac{b}{c} \\ \sin \beta = \frac{\text{طول ضلع مقابل } \beta}{\text{طول وتر}} = \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\text{ج)} \begin{cases} \tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل } \alpha}{\text{طول ضلع مجاور } \alpha} = \frac{a}{b} \\ \cot \beta = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \beta}{\text{طول ضلع مقابل } \beta} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \cot \beta$$

$$\text{د)} \begin{cases} \cot \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول ضلع مقابل } \alpha} = \frac{b}{a} \\ \tan \beta = \frac{\text{طول ضلع مقابل } \beta}{\text{طول ضلع مجاور } \beta} = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \cot \alpha = \tan \beta$$

**مثال** درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$$\tan 23^\circ = \cot 77^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\sin 11^\circ = \cos 79^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ = 1 \quad (\text{د})$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ \quad (\text{ج})$$

**پاسخ الف)** درست است.  $11^\circ$  و  $79^\circ$  جمعشان می‌شود  $90^\circ$  و در واقع متمم

یکدیگرند. پس سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر می‌باشد.

**ب)** درست نیست. متمم  $23^\circ$  می‌شود  $67^\circ$  نه  $77^\circ$ . باید می‌گفت:

$$\tan 23^\circ = \cot 67^\circ$$

**ج)** درست است.  $45^\circ$  متمم خودش است! اصلاً بلدیم که:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**د)** درست است.  $1^\circ$  و  $89^\circ$  جمعشان می‌شود  $90^\circ$  و در واقع متمم یکدیگرند.

پس  $\tan 1^\circ = \cot 89^\circ$ . از طرفی کتانژانت عکس تانژانت است و می‌توانیم

$$\text{بنویسیم } \cot 89^\circ = \frac{1}{\tan 89^\circ}, \text{ پس } \tan 1^\circ = \frac{1}{\tan 89^\circ} \text{ و در نتیجه:}$$

$$\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ = 1$$

حالا که داستان متمم‌ها را یاد گرفتید، نسبت‌های مثلثاتی زوایای  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  را راحت‌تر می‌توانید حفظ کنید. بد نیست با یک مثال خودتان را محک بزنید!

**مثال** مقدار عددی عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} \quad (\text{الف})$$

**پاسخ**

$$\text{الف)} \frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{3}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ب)} \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

نسبت‌های مثلثاتی این سه زاویه معروف را باید حفظ باشیم:

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

همان‌طور که می‌بینید، سینوس و کسینوس

$30^\circ$  و  $60^\circ$  جابه‌جا شده یکدیگرند.

تانژانت و کتانژانت این دو زاویه نیز همین

وضع را دارند. کلاً در مورد هر دو زاویه که

جمعشان  $90^\circ$  می‌شود، همین وضعیت

برقرار است. مثال روبه‌رو را ببینید.

**جمع‌بندی متمم‌ها!**

اگر دو زاویه حاده متمم یکدیگر باشند، یعنی جمعشان  $90^\circ$  شود، آن‌گاه

سینوس هر یک با کسینوس دیگری برابر است و تانژانت هر یک با کتانژانت

دیگری:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

این‌طوری هم می‌توانستیم برایتان بگوییم که برای هر زاویه حاده مانند  $\alpha$ :

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

**مثال** دانش‌آموزی در یک کتاب، این سؤال را دید: «اگر  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  و  $\cos \beta = \frac{2}{3}$  باشد،  $\cos(\alpha + \beta)$ ،  $\cos^3 \alpha$ ،  $\cos^2 \beta$  و  $\cos^2 \beta$  برابر با چه اعدادی هستند؟» این دانش‌آموز، در جواب سؤال بالا نوشت:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\cos^3 \alpha = (\cos \alpha)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\cos^2 \beta = (\cos \beta)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\cos^2 \beta = 4 \cos \beta = 4 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

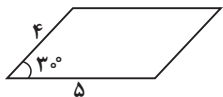
$$\cos^2 \beta = (\cos \beta)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

بقیهٔ جواب‌ها جفنگیات مهمل هستند! در حالت کلی، یک نسبت مثلثاتی مجموع (یا تفاضل) دو زاویه با مجموع (یا تفاضل) همان نسبت مثلثاتی دو زاویه مساوی نیست. نمونه‌اش همین کسینوس؛ در حالت کلی،  $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos \alpha + \cos \beta$ . مثلاً  $\cos(30^\circ + 30^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  اما می‌بینید که  $\cos 30^\circ + \cos 30^\circ \neq \cos(30^\circ + 30^\circ)$ . در مورد  $\cos^3 \alpha$  هم باید خدمتتان عرض کنم که این عبارت،  $\cos^3 \alpha$  است نه  $(\cos \alpha)^3$ . یعنی اول زاویه  $\alpha$  به توان ۳ می‌رسد، بعد کسینوس زاویهٔ حاصل محاسبه می‌شود. نمایش دیگر  $(\cos \alpha)^3$ ،  $\cos^3 \alpha$  است.  $\cos^2 \beta$  را هم که نمی‌دانم این دانش‌آموز گُل ما روی چه حسابی نوشته  $4 \cos \beta$ . مگر شهر هرت است که عدد از جلوی کسینوس بپرد پشتش؟!

آیا جواب‌های دانش‌آموز درست هستند؟

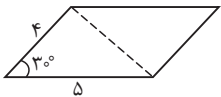
پاسخ فقط یکی از جواب‌های دانش‌آموز درست است:

### مساحت مثلث



**مثال** مساحت متوازی‌الاضلاع روبه‌رو را بیابید.

پاسخ قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌مساحت قسمت می‌کند:



مساحت یکی از مثلث‌ها، می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 30^\circ = 5$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع، می‌شود:

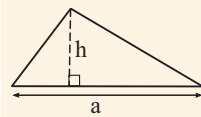
$$S_{\text{کل}} = 2 \times 5 = 10$$

کلاً یادمان باشد که مساحت متوازی‌الاضلاع با اضلاع  $a$  و  $b$  و زاویهٔ حادهٔ  $\alpha$ ،

$$S = ab \sin \alpha$$

می‌شود:

اگر طول ارتفاع و قاعدهٔ نظیر آن را در یک مثلث بدانیم، مثل آب خوردن

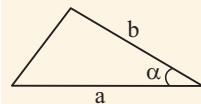


$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

مساحت مثلث را پیدا می‌کنیم:

اگر این‌ها را ندانیم، چه کنیم؟! وقتی طول دو ضلع از یک مثلث و زاویهٔ

بین آن‌ها را داریم، باز می‌توانیم مساحت مثلث را مثل آب خوردن پیدا کنیم. در شکل زیر، ارتفاع وارد بر ضلع  $a$ ، برابر می‌شود با  $h = b \sin \alpha$  و در نتیجه می‌توانیم بگوییم:

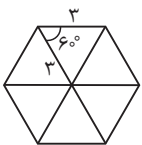


$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

یعنی مساحت مثلث می‌شود نصف حاصل ضرب دو ضلع، ضرب در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

**مثال** به کمک مثلثات، مساحت عضلعي منتظم با ضلع ۳ واحد را بیابید.

پاسخ در شش‌ضلعی منتظم، تمام اضلاع با هم برابرند و هر یک از زاویه‌های داخلی نیز برابر با  $120^\circ$  می‌باشد. دقت کنید که در هر  $n$  ضلعی محدب، مجموع زاویه‌های داخلی برابر  $(n-2) \times 180^\circ$  است. با رسم قطرهای شش‌ضلعی منتظم، هر زاویهٔ  $120^\circ$  به دو زاویهٔ  $60^\circ$  تقسیم می‌شود و می‌توانیم بگوییم ۶ مثلث ایجاد شده متساوی‌الاضلاع هستند. مساحت یکی از این مثلث‌ها طبق فرمول  $\frac{1}{2} ab \sin \alpha$  می‌شود:



$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

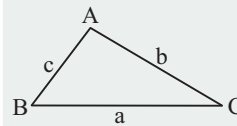
$$S = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

پس مساحت شش‌ضلعی منتظم می‌شود:

نکته! در حالت کلی، در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$ ، ارتفاع برابر  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  و مساحت برابر  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  است.

## قانون سینوس‌ها

در مثلث زیر، مساحت مثلث را به سه طریق می‌توانیم بنویسیم:



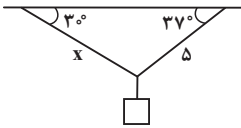
$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

اگر سه عبارت آخر را بر  $\frac{1}{2} abc$  تقسیم کنیم، رابطه زیبایی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

این قانون سینوس‌ها است و می‌گوید نسبت سینوس هر زاویه از مثلث به طول ضلع روبه‌روی آن، مقداری ثابت می‌باشد.

**مثال** در شکل زیر، دو طناب که یکی از آن‌ها ۵ متر است، وزنه‌ای را در حال تعادل نگه داشته‌اند. طول طناب دیگر چند متر است؟  $(\sin 37^\circ = 0.6)$



پاسخ رابطه سینوس‌ها می‌گوید:

$$\frac{\sin 37^\circ}{5} = \frac{\sin 37^\circ}{x} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{0.6}{x} \Rightarrow x = \frac{0.6 \times 5}{1} = 6$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۱

## کتاب محترم درسی

۲۴۶ اگر اندازه یک زاویه حاده کم شود و به صفر نزدیک شود، سینوس، کسینوس و تانژانت آن به ترتیب به چه اعدادی نزدیک می‌شوند؟

- (۱) صفر - صفر - صفر (۲) صفر - یک - صفر (۳) یک - صفر - یک (۴) صفر - صفر - یک

۲۴۷ کدام نادرست است؟

- (۱)  $\sin 25^\circ < \sin 26^\circ$  (۲)  $\cos 26^\circ < \cos 27^\circ$  (۳)  $\tan 27^\circ < \tan 28^\circ$  (۴)  $\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$

۲۴۸ کدام نادرست است؟

- (۱)  $\sin 2^\circ < \frac{1}{3}$  (۲)  $\cos 8^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\tan 4^\circ < 1$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan 25^\circ$

۲۴۹ حاصل  $\frac{\sin 75^\circ \cos 45^\circ}{\tan 6^\circ \cos 15^\circ}$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۲)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (۳)  $\sqrt{6}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۵۰ کدام گزینه نادرست است؟

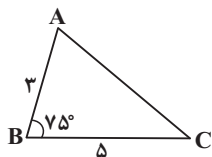
- (۱)  $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$  (۲)  $\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$  (۳)  $\tan 2^\circ = \tan 88^\circ$  (۴)  $\tan 3^\circ = \frac{1}{\tan 87^\circ}$

۲۵۱ یک هواپیما در حال فرود آمدن با زاویه ۳۰ درجه نسبت به ابتدای باند یک فرودگاه است. وقتی هواپیما در ۳۴۰۰ متری باند فرودگاه است، تقریباً در چه ارتفاعی از

سطح زمین قرار دارد؟

- (۱) ۵۰۰ متر (۲) ۱۰۰۰ متر (۳) ۲۰۰۰ متر (۴) ۲۵۰۰ متر

(کتاب درسی)



۲۵۲ با فرض  $\sin 75^\circ = 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر کدام است؟

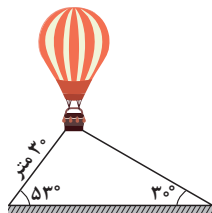
- (۱)  $7/2$  (۲)  $7/3$  (۳)  $14/4$  (۴)  $14/6$

۲۵۳ در شکل مقابل، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر باشد، با فرض  $\sin 53^\circ = 0.8$

(کتاب درسی)

طول طناب دوم چند متر است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۵۲ (۳) ۴۸ (۴) ۴۵



## کنکورهای اخیر

۲۵۴ اندازه دو قطر از متوازی الاضلاع ۱۲ و  $8\sqrt{3}$  واحد است. این دو قطر با زاویه ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

(تجربی خارج ۹۲)

۲۵۵ مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر  $b = 8$  و  $c = 5$  باشد، اندازه ضلع متوسط  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{39}$  (۲)  $\sqrt{41}$  (۳)  $3\sqrt{5}$  (۴)  $5\sqrt{2}$

۲۵۶ ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق  $45^\circ$  و  $40^\circ$  است. ارتفاع

(ریاضی خارج ۹۴)

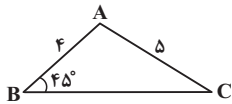
مجسمه کدام است؟ ( $\tan 40^\circ = 0.8$ )

- (۱) ۶ (۲)  $6/4$  (۳) ۷ (۴)  $7/2$

تست‌های بیشتر



۲۵۷ در شکل روبه‌رو،  $\tan \hat{C}$  کدام است؟

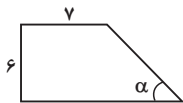


- (۱)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{17}}$  (۲)  $\frac{\sqrt{8}}{5}$  (۳)  $\frac{\sqrt{17}}{5}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۲۵۸ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتی‌متر و تانژانت یکی از زاویه‌های آن ۳ است. مساحت مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

۲۵۹ اگر  $\sin \alpha = 0.6$  باشد، محیط دوزنقه روبه‌رو کدام است؟



- (۱) ۳۰ (۲) ۳۸ (۳) ۴۴ (۴) ۵۱

۲۶۰ فردی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر روبه‌روی یک درخت و به فاصله ۸ متر از آن ایستاده است. اگر او بخواهد بدون حرکت دادن چشمانش (!) نوک درخت را ببیند، باید سرش را

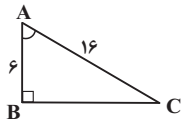
۲۶ درجه از حالتی که به روبه‌رو نگاه می‌کند، به بالا حرکت دهد. ارتفاع درخت تقریباً چند متر است؟ ( $\tan 26^\circ \approx 0.48$ )

- (۱)  $3/84$  (۲)  $4/84$  (۳)  $5/64$  (۴)  $18/46$

۲۶۱ اگر  $\theta = 5^\circ$  باشد، کدام یک بزرگ‌تر است؟

- (۱)  $\sin \theta^2$  (۲)  $\sin^2 \theta$  (۳)  $\sin 2\theta$  (۴)  $\sin \theta$

۲۶۲ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو، حاصل عبارت  $\sin \hat{A} \cos \hat{A} + \tan \hat{A}$  چند برابر  $\sqrt{55}$  است؟



- (۱)  $\frac{73}{192}$  (۲)  $\frac{71}{192}$  (۳)  $\frac{54}{113}$  (۴)  $\frac{53}{113}$

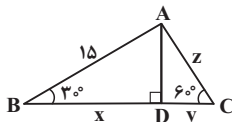
۲۶۳ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۲ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن  $\frac{3}{4}$  است. محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

- (۱)  $14 + \sqrt{7}$  (۲)  $14 + 3\sqrt{7}$  (۳)  $21 + \sqrt{7}$  (۴)  $21 + 3\sqrt{7}$

۲۶۴ اگر  $3 = (x-y)^2 \cos^2 60^\circ - (x+y)^2 \sin^2 30^\circ$  باشد، مقدار  $xy$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۶۵ در مثلث روبه‌رو، کدام گزینه درست است؟



- (۱)  $x = 7/5$  (۲)  $y = 7/5\sqrt{3}$  (۳)  $x + z = 12\sqrt{3}$  (۴)  $z = 5\sqrt{3}$

۲۶۶ اگر  $A = \sin 12^\circ$ ،  $B = \cos 7^\circ$  و  $C = \tan 5^\circ$  باشد، کدام مطلب درست است؟

- (۱)  $A < B < C$  (۲)  $A < C < B$  (۳)  $C < B < A$  (۴)  $B < A < C$

۲۶۷  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه هستند. بیشترین مقدار عبارت  $2 \sin \alpha + 3 \cos \beta$  چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۶۸ حاصل کدام یک از عبارتهای زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟

- (۱)  $\frac{2 \cos^2(30^\circ) - 2 \sin(30^\circ)}{2 \tan(45^\circ) + 3 \cos^2(60^\circ)}$  (۲)  $\frac{\tan(60^\circ) - \tan(30^\circ)}{1 + \tan(60^\circ) \tan(30^\circ)}$  (۳)  $\frac{\sin^2(70^\circ) - \cos^2(70^\circ)}{\tan^2(60^\circ)}$  (۴)  $\cos^2(70^\circ) - \sin^2(70^\circ)$



## تست‌های بیشتر!



۲۶۹ فردی با قد ۲ متر می‌خواهد میله‌ای به طول ۳ متر را که روی زمین قرار دارد، با زاویه  $\alpha$  درجه بلند کند. او یک سر میله را روی زمین به دیوار تکیه می‌دهد و سر دیگر میله را

تا قد خود بالا می‌آورد. سپس آن‌قدر به سمت دیوار حرکت می‌کند تا زاویه میله با سطح زمین  $\alpha$  درجه شود. او چند متر به سمت دیوار حرکت کرده است؟

$$(1) \quad 5 - \frac{\sqrt{2}}{\tan \alpha} \quad (2) \quad 3 - \frac{\sqrt{5}}{\tan \alpha} \quad (3) \quad \sqrt{5} - \frac{2}{\tan \alpha} \quad (4) \quad \sqrt{5} - \frac{3}{\tan \alpha}$$

۲۷۰ میله‌ای فلزی داریم که می‌خواهیم برای باز نگه داشتن یک در طبق شکل روبه‌رو از آن استفاده کنیم. اگر زاویه بین در و دیوار  $\alpha$

شده باشد، نسبت طول میله به عرض در، کدام است؟

$$(1) \quad \sin \alpha \quad (2) \quad \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$(3) \quad 2 \sin \alpha \quad (4) \quad 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

۲۷۱ اگر  $\sin 2\alpha < \frac{1}{2}$  و  $\tan \alpha > 1$  باشد،  $\alpha$  کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

$$(1) \quad 2^\circ \quad (2) \quad 16^\circ \quad (3) \quad 12^\circ \quad (4) \quad 8^\circ$$

۲۷۲ حاصل  $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$  برابر است با:

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 89 \quad (4) \quad 90$$

۲۷۳ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یکی از دو ضلع زاویه قائمه که بزرگ‌تر است، ۵ می‌باشد. اگر تانژانت یکی از زاویه‌های حاده این مثلث ۸ باشد، طول ضلع دیگر زاویه

قائمه چند است؟

$$(1) \quad 0.125 \quad (2) \quad 0.625 \quad (3) \quad 0.825 \quad (4) \quad 1.25$$

۲۷۴ اگر  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  باشد، زاویه  $\theta$  بین کدام زاویه‌ها قرار دارد؟

$$(1) \quad \text{صفر و } 3^\circ \quad (2) \quad 3^\circ \text{ و } 45^\circ \quad (3) \quad 45^\circ \text{ و } 6^\circ \quad (4) \quad 6^\circ \text{ و } 9^\circ$$

۲۷۵ اگر  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$  باشد و  $\sin \gamma = \frac{2}{3}$ ، مقدار  $\cos(\alpha + \beta)$  کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{9} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۲۷۶ اگر  $5^\circ < \alpha < 8^\circ$  باشد، حاصل کدام گزینه بزرگ‌تر است؟

$$(1) \quad \sin \alpha \quad (2) \quad \cos \alpha \quad (3) \quad \sqrt{\sin \alpha} \quad (4) \quad \sqrt{\cos \alpha}$$

۲۷۷ اگر  $1^\circ < \alpha < 4^\circ$  باشد، حاصل کدام گزینه بزرگ‌تر است؟

$$(1) \quad \sin \alpha \quad (2) \quad \cos \alpha \quad (3) \quad \sqrt{\cos \alpha} \quad (4) \quad \sin^2 \alpha$$

۲۷۸  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه حاده‌اند. اگر  $\sin \alpha < 0.7$  و  $\cos \beta > 0.8$  باشد، کدام مطلب درست است؟

$$(1) \quad 45^\circ < \alpha < 90^\circ \quad (2) \quad 45^\circ < \beta < 90^\circ \quad (3) \quad \alpha + \beta > 90^\circ \quad (4) \quad \alpha + \beta \text{ هیچ وقت قائمه نمی‌شود.}$$

۲۷۹ یک شناگر در حال نزدیک شدن به ساحل است. وقتی او در یک نقطه برای استراحت توقف می‌کند، بالای یک برج را که نزدیک ساحل است، تحت زاویه  $3^\circ$  درجه می‌بیند

و هنگامی که ۳۴ متر دیگر به طرف ساحل شنا می‌کند، بالای برج را تحت زاویه  $6^\circ$  درجه می‌بیند. ارتفاع برج تقریباً چند متر است؟ (پایین برج، هم‌سطح با دریاست.)

$$(1) \quad 25 \quad (2) \quad 26 \quad (3) \quad 30 \quad (4) \quad 34$$

۲۸۰ نردبانی به دیوار تکیه داده شده طوری که زاویه آن با سطح زمین  $45^\circ$  درجه است. از قضا (!) پای نردبان می‌لغزد و  $3^\circ$  سانتی‌متر از دیوار دور می‌شود. اگر در این

حالت، زاویه نردبان با سطح زمین  $3^\circ$  درجه باشد، طول نردبان تقریباً چند متر است؟

$$(1) \quad 1/2 \quad (2) \quad 1/5 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 2/3$$

۲۸۱ از درون یک قایق نزدیک ساحل، دو ساختمان که در راستای ساحل و به فاصله  $200$  متری از یکدیگر قرار دارند، دیده می‌شود. اگر خطوطی که هر کدام از آن دو ساختمان

را به قایق وصل می‌کنند، با راستای ساحل، زاویه‌های  $3^\circ$  و  $45^\circ$  درجه بسازند، فاصله قایق تا ساحل تقریباً چه قدر است؟

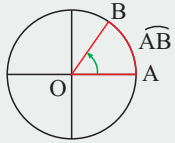
$$(1) \quad 68 \quad (2) \quad 72 \quad (3) \quad 75 \quad (4) \quad 80$$

# دایره مثلثاتی

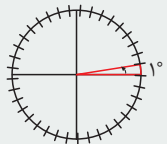
با دایره مثلثاتی دوست شوید! با دایره مثلثاتی دوست باشید! دایره مثلثاتی را دوست داشته باشید! آن وقت است که دایره مثلثاتی هم شما را دوست خواهد داشت!

## دایره مثلثاتی

زاویه  $\widehat{AOB}$  کمان  $\widehat{AB}$  را روی دایره مشخص می‌کند. این زاویه که اضلاع آن شعاع‌هایی از دایره است و رأس آن روی مرکز دایره قرار دارد، یک زاویه مرکزی محسوب می‌شود.



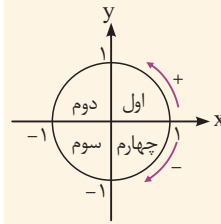
اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها ۱ درجه است:  $1^\circ$ .



اندازه هر کمان، با زاویه مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.

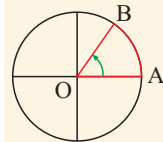
**مثال** زاویه‌های  $-27^\circ$ ،  $-45^\circ$ ،  $21^\circ$ ،  $-165^\circ$ ،  $-56^\circ$ ،  $765^\circ$  و  $-71^\circ$  درجه را نشان دهید.

دایره‌ای است که: اولاً شعاع آن ۱ واحد است، ثانیاً جهت دار است. جهت مثبت این

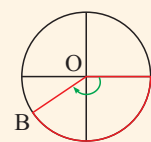


دایره (جهت مثلثاتی)، برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، راستی، ما عادت داریم دایره مثلثاتی را ببریم در دستگاه مختصات و مرکز آن را روی مبدأ مختصات قرار دهیم. با این کار، دایره ۴ ناحیه (ربع) پیدا می‌کند.

مبدأ حرکت برای ایجاد زاویه‌های مثلثاتی، نقطه  $A(1,0)$  است، اگر از این نقطه، حول مرکز دایره O دوران کنیم و به نقطه‌ای مثل B برسیم، زاویه  $\widehat{AOB}$  ایجاد می‌شود. حالا اگر گردش ما پادساعتگرد بوده باشد، این زاویه



زاویه مثبت



زاویه منفی

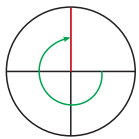
مثبت و اگر گردش ما ساعتگرد

بوده باشد، این زاویه منفی است.

راستی، بیش از یک دور هم

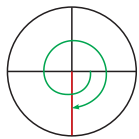
می‌توانیم بچرخیم!

**پاسخ** از چپ به راست، ببینید:



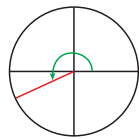
$$-(3 \times 90)$$

سه ربع دور ساعتگرد



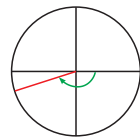
$$-(5 \times 90)$$

پنج ربع دور ساعتگرد



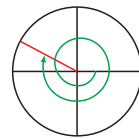
$$180 + 30$$

نیم دور + ۳۰ درجه پادساعتگرد



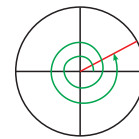
$$-180 + 15$$

نیم دور ساعتگرد + ۱۵ درجه پادساعتگرد



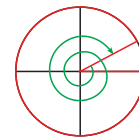
$$-360 - 180 - 20$$

یک دور + نیم دور - ۲۰ درجه ساعتگرد



$$(2 \times 360) + 45$$

دو دور + ۴۵ درجه پادساعتگرد



$$-(2 \times 360) + 10$$

دو دور ساعتگرد + ۱۰ درجه پادساعتگرد

## نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای حاده (بین صفر و ۹۰ درجه) تعریف کردیم. برای بقیه زاویه‌ها چه کنیم؟ اگر زاویه‌های حاده ربع اول را در نظر بگیریم، می‌توانیم تعریف قبلی را معادل‌سازی کنیم. مثلاً در شکل روبه‌رو،  $\sin \alpha = \frac{y}{r}$  که چون شعاع دایره  $r=1$  است، به  $\sin \alpha = y$  می‌رسیم یا  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$  که چون  $r=1$ ، به  $\cos \alpha = x$  می‌رسیم.

**مثال** در شکل روبه‌رو، مختصات نقطه P را بیابید.

**پاسخ** عرض نقطه P با سینوس زاویه  $\alpha = 3^\circ$  و طول

نقطه P با کسینوس زاویه  $\alpha = 3^\circ$  برابر است با:

$$x_p = \cos \alpha, \quad y_p = \sin \alpha$$

$$P(x, y) = P(\cos 3^\circ, \sin 3^\circ) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

اگر نقطه  $A(1,0)$  را حول مرکز دایره مثلثاتی،  $\alpha$  درجه پادساعتگرد دوران دهیم، مختصات نقطه جدید به صورت  $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$  خواهد بود.

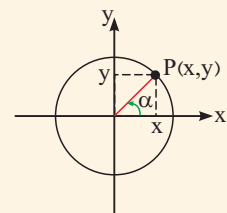
اگر مختصات نقطه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه  $\alpha$  به صورت  $P(x, y)$  باشد، نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin \alpha = y$$

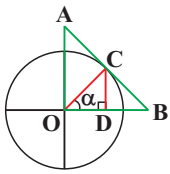
$$\cos \alpha = x$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

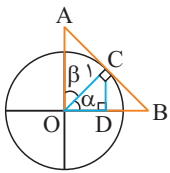
$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$



**مثال** شعاع دایره زیر، ۱ است. مشخص کنید هر یک از عبارات‌های زیر، با طول کدام‌یک از پاره‌خط‌هایی که در شکل مشاهده می‌شود، مساوی است؟

الف)  $\tan \alpha$ ب)  $\cos \alpha$ ج)  $\sin \alpha$ د)  $\frac{1}{\tan \alpha}$ ه)  $\frac{1}{\cos \alpha}$ و)  $\frac{1}{\sin \alpha}$ 

**پاسخ** ابتدا دقت کنید که OC بر AB عمود است، چون AB مماس بر دایره و OC شعاع است. همیشه اگر خطی بر دایره مماس کنیم، شعاعی که به نقطه تماس وارد می‌شود، بر خط مماس عمود است. حالا از مثلث‌های قائم‌الزاویه روی شکل، نهایت استفاده را می‌کنیم.



الف) مثلث قائم‌الزاویه OCD:  $\sin \alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} \Rightarrow \sin \alpha = CD$

ب) مثلث قائم‌الزاویه OCD:  $\cos \alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} \Rightarrow \cos \alpha = OD$

ج) مثلث قائم‌الزاویه OBC:  $\tan \alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{1} \Rightarrow \tan \alpha = BC$

د) مثلث قائم‌الزاویه OAC:  $\cos \beta = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{OA} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{OA} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = OA$

دقت کنید که  $\alpha$  و  $\beta$  متمم‌اند و در نتیجه سینوس یکی با کسینوس دیگری مساوی است.

ه) مثلث قائم‌الزاویه OBC:  $\cos \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{OB} \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = OB$

و) مثلث قائم‌الزاویه OAC:  $\tan \beta = \frac{AC}{OC} = \frac{AC}{1} = AC \Rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} = AC$

دقت کنید که  $\alpha$  و  $\beta$  متمم‌اند و در نتیجه تانژانت یکی با کتانژانت یا عکس تانژانت دیگری مساوی است.

### نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرزی



**مثال** نسبت‌های مثلثاتی  $180^\circ$  را بیابید.

**پاسخ** انتهای کمان روبه‌روی  $180^\circ$  این‌جاست:

مختصات این نقطه  $(-1, 0)$  است. پس:

$$\sin 180^\circ = y = 0, \quad \cos 180^\circ = x = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0, \quad \cot 180^\circ = \frac{-1}{0} \text{ تعریف نشده}$$

لطفن، خواهش، التماس، چون هر کی دوست داریم، نسبت‌های مثلثاتی زوایه‌های مرزی (مضارب صحیح  $90^\circ$  درجه) را حفظ نکنید! با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی و مختصات نقطه‌ای که انتهای کمان روی آن واقع شده، در کم‌تر از ۵ ثانیه می‌توان نسبت مثلثاتی موردنظر را پیدا کرد!

**مثال** نسبت‌های مثلثاتی  $270^\circ$  را بیابید.

**پاسخ** انتهای کمان روبه‌روی  $270^\circ$  این‌جاست: مختصات این نقطه  $(0, -1)$  است، پس:

$$\sin 270^\circ = y = -1, \quad \cos 270^\circ = x = 0$$

$$\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{ تعریف نشده}, \quad \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

**مثال** حاصل عبارت  $A = \sin 90^\circ + (\cos 54^\circ)(\cos 36^\circ) + \cot 45^\circ$  را بیابید.

**پاسخ** با توجه به شکل‌های زیر،  $A = 1 + (-1)(1) + 0 = 0$ .



$$\sin 90^\circ = y = 1$$



$$\cos 54^\circ = x = -1$$

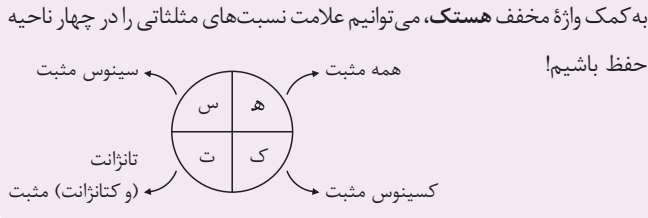


$$\cos 36^\circ = x = 1$$

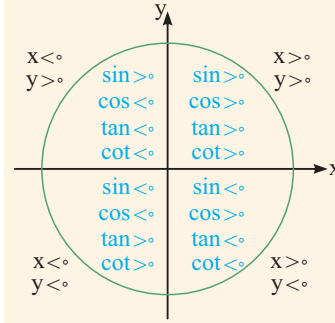


$$\cot 45^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی



X در سمت راست محور Y ها (نواحی اول و چهارم) مثبت و در سمت چپ آن (نواحی دوم و سوم) منفی است.  
Y در بالای محور X ها (نواحی اول و دوم) مثبت و پایین آن (نواحی سوم و چهارم) منفی است.



حالا با در نظر گرفتن تعریف نسبت‌های مثلثاتی و علامت X و Y در هر ناحیه، علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه به دست می‌آید.

**مثال** اگر  $\sin \alpha \cdot \tan^3 \alpha < 0$  و  $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$  باشد، نقطهٔ انتهای کمان

روبرو به زاویهٔ  $\alpha$  در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

**پاسخ** علامت  $\tan^3 \alpha$  همان علامت  $\tan \alpha$  است. پس  $\sin \alpha \cdot \tan^3 \alpha < 0$  به

این معنی است که سینوس و تانژانت مختلف‌العلامت‌اند. یعنی  $\alpha$  در ناحیهٔ دوم یا سوم قرار دارد. از طرفی جمع سینوس و کسینوس مثبت شده است. این در

حالی است که در ناحیهٔ سوم،  $\sin \alpha + \cos \alpha$  حتماً منفی می‌شود (هر دو منفی‌اند)، پس  $\alpha$  باید در ربع دوم باشد که در آن  $\sin \alpha + \cos \alpha$  می‌تواند مثبت شود.

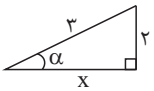
روش مثلث خوشگل

**مثال** اگر  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$  و انتهای کمان روبروی  $\alpha$  در ناحیهٔ سوم دایرهٔ

مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  را بیابید.

**پاسخ**

**گام ۱:** علامت منفی را در  $-\frac{2}{3}$  بی‌خیال می‌شویم. سینوس، ضلع مقابل به وتر است. پس یک مثلث قائم‌الزاویه می‌کشیم طوری‌که وتر آن ۳ و ضلع مقابل  $\alpha$  در آن ۲ واحد باشد.



**گام ۲:** با فیثاغورس، ضلع سوم مثلث را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + 2^2 = 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

حالا در شکل بالا داریم:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

**گام ۳:** چون  $\alpha$  در ناحیهٔ سوم قرار دارد، کسینوس آن منفی است:  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  و تانژانت و کتانژانت آن مثبت است. یعنی همان مقادیری که نوشته‌ایم.

بعضی وقت‌ها مقدار یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای را داریم و مقدار بقیهٔ نسبت‌های مثلثاتی آن را می‌خواهیم. یک راه برای این کار، استفاده از اتحادهای مثلثاتی است که جلوتر می‌خوانیم. در این جا یک روش ساده‌تر یاد می‌گیریم.  
**گام ۱:** اگر نسبت داده شده منفی بود، موقتاً علامت منفی آن را بی‌خیال می‌شویم. سپس یک مثلث قائم‌الزاویه خوشگل می‌کشیم و طول دو ضلع آن را طوری انتخاب می‌کنیم که داده مسئله تأمین شود.

**گام ۲:** با فیثاغورس، ضلع سوم مثلث را پیدا می‌کنیم و هر نسبتی را که خواستیم می‌نویسیم.

**گام ۳:** با توجه به این‌که انتهای کمان در کدام ناحیه قرار دارد، علامت نسبت‌های مثلثاتی موردنظر را اصلاح می‌کنیم.

مضارب زوج  $180^\circ$  در کمان

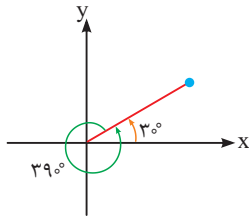
گفتیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های هم‌انتهای، با یکدیگر مساوی‌اند. این مطلب را این‌گونه هم می‌توانیم بگوییم: اگر در یک زاویه، مضارب صحیح  $360^\circ$  با زاویهٔ دیگری جمع یا تفریق شده بود، می‌توانیم آن مضارب را حذف کنیم.

$$\sin 405^\circ = \sin(\underbrace{360^\circ}_{\text{حذف}} + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثلاً:

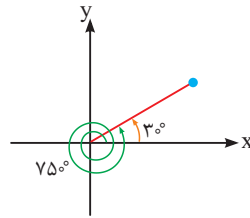
دو زاویهٔ  $\alpha$  و  $\beta$  را هم‌انتهای بگوییم هرگاه اضلاع انتهایی آن‌ها بر هم منطبق شود، در این صورت، هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با یکدیگر مساوی است. اما از کجا بفهمیم دو زاویه هم‌انتهای هستند یا نه؟

اختلاف زاویه‌های هم‌انتهای، مضرب زوجی از  $180^\circ$  است. در واقع، برای به‌دست آوردن زاویه‌های هم‌انتهای با زاویهٔ  $\alpha$ ، کافی است مضارب زوج  $180^\circ$  را به  $\alpha$  اضافه کنیم. دقت کنید که مضارب زوج  $180^\circ$ ، همان مضرب‌های صحیح  $360^\circ$  هستند.



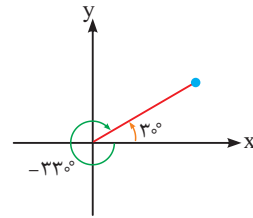
$$36^\circ + 3^\circ = 39^\circ$$

$$\sin 39^\circ = \sin 3^\circ$$



$$(2 \times 36^\circ) + 3^\circ = 75^\circ$$

$$\tan 75^\circ = \tan 3^\circ$$



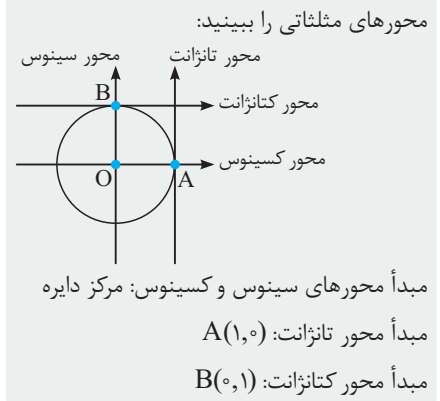
$$-36^\circ + 3^\circ = -33^\circ$$

$$\cos(-33^\circ) = \cos 3^\circ$$

### محورهای مثلثاتی

چگونه به کمک محورهای مثلثاتی، تانژانت (یا کتانژانت) یک کمان مثل  $\alpha$  را مشخص کنیم؟ از انتهای کمان  $\alpha$  به مرکز دایره وصل می‌کنیم و خط حاصل را امتداد می‌دهیم تا به محور تانژانت (یا کتانژانت) برسیم. بقیه داستان مثل محورهای سینوس و کسینوس است!

چگونه به کمک محورهای مثلثاتی، سینوس و کسینوس یک کمان مثل  $\alpha$  را مشخص کنیم؟ از انتهای کمان  $\alpha$ ، بر محور سینوس (یا کسینوس) عمود می‌کنیم. فاصله پای عمود تا مبدأ محور یعنی مرکز دایره، اندازه  $\sin \alpha$  (یا  $\cos \alpha$ ) را بدون در نظر گرفتن علامت مشخص می‌کند. اگر پای عمود بالای مبدأ (یا سمت راست آن) باشد، علامت  $\sin \alpha$  (یا  $\cos \alpha$ ) مثبت و در غیر این صورت منفی است.



**مثال** به کمک محورهای مثلثاتی، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

(د)  $\cos 69^\circ$

(ح)  $\cot 24^\circ$

(ج)  $\cos 24^\circ$

(ز)  $\cot 15^\circ$

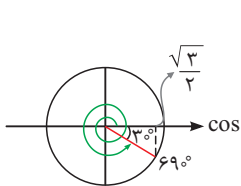
(ب)  $\sin 30^\circ$

(و)  $\tan 135^\circ$

(الف)  $\sin 15^\circ$

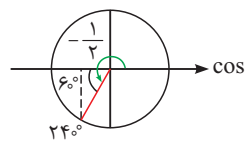
(ه)  $\tan 225^\circ$

**پاسخ** همه چیز را روی شکل‌ها به وضوح ببینید! در این مثال‌ها از زاویه ضلع انتهایی زاویه‌ها با جهت مثبت یا منفی محور X ها نیز کمک گرفته شده است.



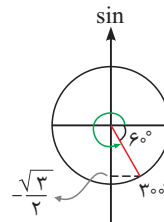
$$\cos 69^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(د)



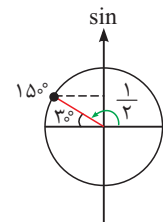
$$\cos 24^\circ = -\frac{1}{2}$$

(ج)



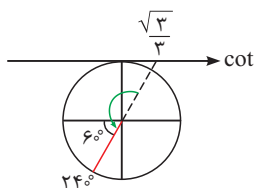
$$\sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ب)



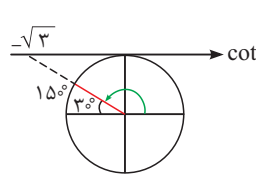
$$\sin 15^\circ = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

(الف)



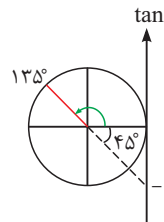
$$\cot 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(ح)



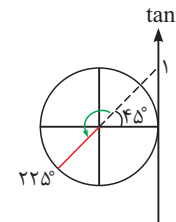
$$\cot 15^\circ = -\sqrt{3}$$

(ز)



$$\tan 135^\circ = -1$$

(و)



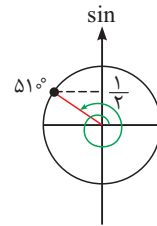
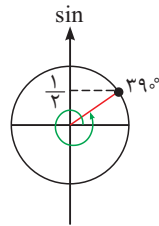
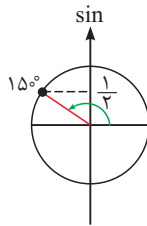
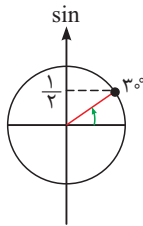
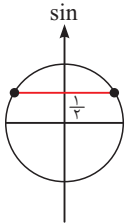
$$\tan 225^\circ = 1$$

(ه)

به کمک محورهای مثلثاتی، می‌توان فهمید که در یک بازه مشخص، چند زاویه وجود دارد که یک نسبت مثلثاتی مورد نظر برابر با عددی مشخص بشود. مثال‌ها را ببینید.

**مثال** در فاصله  $0^\circ$  تا  $54^\circ$  درجه، چند زاویه وجود دارد که سینوس آن برابر  $\frac{1}{3}$  شود؟

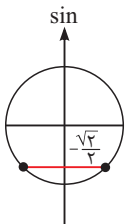
**پاسخ** عدد  $\frac{1}{3}$  را روی محور سینوس‌ها مشخص و از آن عمودی بر این محور رسم می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه، محل انتهایی کمان‌هایی را نشان می‌دهد که سینوس آن‌ها  $\frac{1}{3}$  است. بازه  $0^\circ$  تا  $54^\circ$  درجه شامل یک دور کامل پادساعتگرد ( $0^\circ$  تا  $360^\circ$ ) و یک نیم‌دور پادساعتگرد ( $360^\circ$  تا  $540^\circ$ ) می‌باشد.



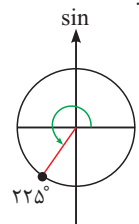
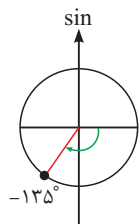
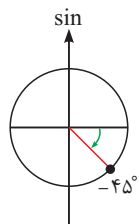
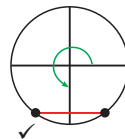
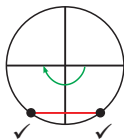
در این  $1/5$  دور، ۴ بار از نقاط مشخص شده می‌گذریم. یعنی ۴ زاویه! حتی می‌توانیم خود زاویه‌ها را مشخص کنیم:

**مثال** در فاصله  $-180^\circ$  تا  $270^\circ$  درجه، چند زاویه وجود دارد که سینوس آن برابر  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$  شود؟

**پاسخ** عدد  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$  را روی محور سینوس‌ها مشخص و از آن عمودی بر این محور رسم می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه، محل انتهایی کمان‌هایی را نشان می‌دهد که سینوس آن‌ها  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$  است. بازه  $-180^\circ$  تا  $270^\circ$  درجه، شامل یک نیم‌دور ساعتگرد ( $-180^\circ$  تا  $0^\circ$ ) و سه ربع دور پادساعتگرد ( $0^\circ$  تا  $270^\circ$ ) می‌باشد.



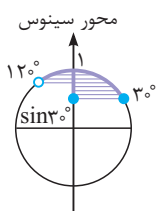
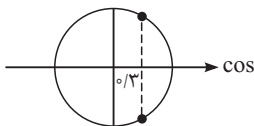
در نیم دور منفی، ۲ بار و در سه ربع دور مثبت، ۱ بار از این نقاط می‌گذریم. یعنی ۳ زاویه!



می‌توانیم خود زاویه‌ها را نیز مشخص کنیم:

**مثال** در فاصله  $0^\circ$  تا  $360^\circ$  درجه، چند زاویه وجود دارد که کسینوس آن‌ها برابر  $\frac{2}{3}$  باشد؟

**پاسخ** عدد  $\frac{2}{3}$  را روی محور کسینوس‌ها مشخص و از آن عمودی بر این محور رسم می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه، محل انتهایی کمان‌هایی را نشان می‌دهد که کسینوس آن‌ها  $\frac{2}{3}$  می‌شود. در فاصله  $0^\circ$  تا  $360^\circ$  درجه یعنی یک دور کامل پادساعتگرد، ۲ بار از این نقاط می‌گذریم و این یعنی ۲ زاویه! در این مثال، زاویه‌ها معروف نیستند و نمی‌توانیم مقدارشان را مشخص کنیم.



**مثال** اگر  $30^\circ \leq x < 120^\circ$  باشد، حدود  $\sin x$  را بیابید.

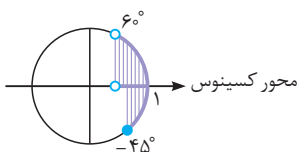
**پاسخ** انتهایی کمان‌های فاصله  $30^\circ$  تا  $120^\circ$  درجه را روی دایره پرننگ می‌کنیم. سپس قسمت پرننگ شده را روی محور سینوس‌ها تصویر می‌کنیم. تصویر روی محور سینوس‌ها، حدود  $\sin x$  را نشان می‌دهد. با توجه به شکل روبه‌رو،  $\sin 30^\circ \leq \sin x \leq 1$ .

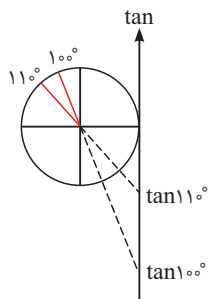
به کمک محورهای مثلثاتی، می‌توانیم مشخص کنیم که با تغییر زاویه در یک بازه، یک نسبت مثلثاتی مورد نظر، چه مقداری را اختیار می‌کند. مثال‌ها را ببینید.

یعنی  $\frac{1}{3} \leq \sin x \leq 1$ .

**مثال** اگر  $-45^\circ \leq x < 60^\circ$  باشد، حدود  $\cos x$  را بیابید.

**پاسخ** انتهایی کمان‌های فاصله  $(-45^\circ, 60^\circ)$  را که اجتماع  $(0^\circ, 60^\circ)$  و  $(-45^\circ, 0^\circ)$  است، روی دایره پرننگ و آن را روی محور کسینوس‌ها تصویر می‌کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو،  $\cos 60^\circ < \cos x \leq 1$ ، یعنی  $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$ .





**مثال**  $\tan 11^\circ$  بزرگ‌تر است یا  $\tan 11^\circ$ ؟

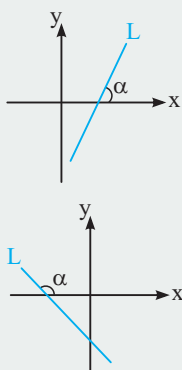
محورهای مثلثاتی، برای مقایسه نسبت‌های مثلثاتی نیز مفید است! مثال را ببینید.

**پاسخ** با توجه به شکل مقابل،  $\tan 11^\circ$  بزرگ‌تر است. تمام!

### شیب و تانژانت

خلاصه این‌که:

❖ شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد، مساوی است.



① شیب خط  $L$  برابر است با  $\tan \alpha$ . چون شیب  $L$  مثبت است،  $\tan \alpha$  هم مثبت است. در این حالت،  $\alpha$  حاده است.

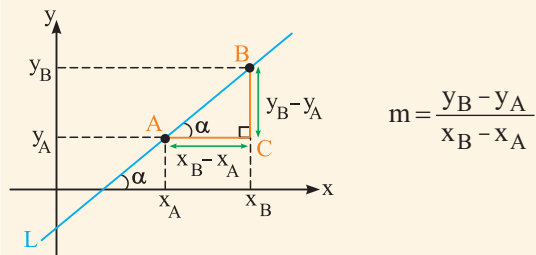
② شیب خط  $L$  برابر است با  $\tan \alpha$ . چون شیب  $L$  منفی است،  $\tan \alpha$  هم منفی است. در این حالت،  $\alpha$  منفرجه است.

❖ شیب هر خط موازی محور  $x$  ها صفر است. زاویه‌ای هم که این خطوط با محور  $x$  ها می‌سازند، صفر است. پس  $\tan 0^\circ = 0$ .

همچنین شیب هر خط موازی محور  $y$  ها بی‌نهایت است. زاویه‌ای هم که این خطوط با محور  $x$  ها می‌سازند،  $90^\circ$  است. پس  $\tan 90^\circ$  بی‌نهایت است و همان‌طور که قبلاً گفتیم به عنوان عددی حقیقی تعریف نمی‌شود.

در بین نسبت‌های مثلثاتی، تانژانت یک ویژگی خوشگلی دارد و آن هم این است که یک‌جورهایی با شیب خط ارتباط دارد!

در شکل زیر، خط  $L$  را می‌بینید که با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $\alpha$  ساخته است.  $A$  و  $B$  دو نقطه دلخواه روی این خطاند. شیب خط  $L$  برابر است با:



که  $x_A$  و  $y_A$  به ترتیب طول و عرض نقطه  $A$ ،  $x_B$  و  $y_B$  به ترتیب طول و عرض نقطه  $B$  هستند. حالا به مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  نگاه کنید، چون  $AC$  موازی محور  $x$  هاست، زاویه  $BAC$  مساوی  $\alpha$  می‌باشد. در این مثلث،  $\tan \alpha$  برابر است با نسبت طول  $BC$  به طول  $AC$ . با توجه به شکل، طول  $BC$ ، همان  $y_B - y_A$  و طول  $AC$  همان  $x_B - x_A$  است. یعنی:

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول } BC}{\text{طول } AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

**مثال** هر یک از خطوط زیر با جهت مثبت محور  $x$  ها چه زاویه‌ای می‌سازند؟

الف) خط به معادله  $y = \sqrt{3}x - 2$  (ب) خط به معادله  $y - x - \sqrt{3} = 0$  (ج) خطی که از دو نقطه  $(1, 0)$  و  $(4, \sqrt{3})$  می‌گذرد.

**پاسخ**

الف) شیب این خط  $\sqrt{3}$  (ضریب  $x$ ) است. یعنی تانژانت زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد،  $\sqrt{3}$  است. تانژانت چه زاویه‌ای  $\sqrt{3}$  بود؟ آفرین!  $60^\circ$ .

ب)  $y$  را یک طرف تساوی نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر می‌بریم:  $y = x + \sqrt{3}$ . حالا شیب این خط ضریب  $x$  است، یعنی ۱. بنابراین تانژانت زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد، ۱ است. تانژانت چه زاویه‌ای ۱ بود؟ آفرین!  $45^\circ$ .

ج) شیب این خط برابر است با:  $\frac{\sqrt{3} - 0}{4 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . این همان تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد. تانژانت چه زاویه‌ای  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  بود؟ آفرین!  $30^\circ$ .

**مثال** معادله خط‌های زیر را بنویسید.

الف) خطی که از نقطه  $(\sqrt{3}, 2)$  بگذرد و با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $30^\circ$  بسازد.  
ب) خطی که از مبدأ مختصات بگذرد و با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $45^\circ$  بسازد.  
ج) خطی که از نقطه‌ای روی محور  $y$  ها با عرض ۳ بگذرد و با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $60^\circ$  بسازد.

❖ اگر شیب یک خط برابر  $m$  باشد و نقطه  $(x_0, y_0)$  نیز روی آن خط قرار داشته باشد، معادله خط به صورت روبه‌رو خواهد بود:  $y - y_0 = m(x - x_0)$   
❖ اگر شیب یک خط برابر  $m$  و عرض از مبدأ آن  $b$  باشد، معادله خط به صورت  $y = mx + b$  خواهد بود.

پاسخ الف) معادله خط را  $y = mx + b$  می‌گیریم.  $m$  شیب خط است و تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد. یعنی  $m = \tan 30^\circ$ . تانژانت  $30^\circ$  هم که  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است. پس  $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$  و معادله خط به صورت  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$  می‌باشد. حالا باید  $b$  (عرض از مبدأ) را به دست آوریم. چون خط از نقطه  $(\sqrt{3}, 2)$  می‌گذرد، اگر در معادله خط به جای  $x$ ،  $\sqrt{3}$  بگذاریم،  $y$  باید ۲ شود:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{\substack{x=\sqrt{3} \\ y=2}} 2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + b \Rightarrow 2 = \frac{3}{3} + b \Rightarrow b = 2 - 1 = 1$$

بنابراین معادله خط به صورت  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$  است.

ب) معادله خط را  $y = mx + b$  می‌گیریم:

$$m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y = mx + b \xrightarrow{m=1} y = x + b$$

$$y = x + b \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=0}} 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$$

حالا باید  $b$  را به دست آوریم. خط از مبدأ مختصات یعنی نقطه  $(0, 0)$  می‌گذرد:

بنابراین معادله خط به صورت  $y = x$  است.

ج) معادله خط را  $y = mx + b$  می‌گیریم.

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$y = mx + b \xrightarrow{m=\sqrt{3}} y = \sqrt{3}x + b$$

حالا باید  $b$  را به دست بیاوریم. خود سؤال می‌گوید  $b = 3$ . چون  $b$  عرض از مبدأ است و خط هم از نقطه  $(0, 3)$  می‌گذرد:

$$y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=3}} 3 = \sqrt{3} \times 0 + b \Rightarrow b = 3$$

بنابراین معادله خط به صورت  $y = \sqrt{3}x + 3$  است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۲

### کتاب محترم درسی

۲۸۲ شیب کدام خط از بقیه بیشتر است؟

- (۱) خطی که با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $17^\circ$  می‌سازد.  
 (۲) خطی که با جهت مثبت محور  $y$  زاویه  $53^\circ$  می‌سازد.  
 (۳) خطی که با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $63^\circ$  می‌سازد.  
 (۴) خطی که با جهت منفی محور  $x$  زاویه  $13^\circ$  می‌سازد.

(کتاب درسی)

- (۲) اگر  $\alpha$  منفرجه باشد، آنگاه  $9^\circ < \alpha < 12^\circ$ .  
 (۴) اگر  $\alpha$  منفرجه باشد، آنگاه  $12^\circ < \alpha < 18^\circ$ .

(کتاب درسی)

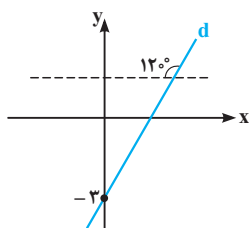
- (۲) اگر  $\sin \theta < \cos \theta$  باشد،  $\theta$  در ربع چهارم است.  
 (۴) در صورت وجود  $\tan \theta$  و  $\cot \theta$  مقدار  $\tan \theta$  بزرگ‌تر است.

(کتاب درسی)

- ۲۸۵ کدام یک از نقاط زیر، روی خطی قرار دارد که با عبور از نقطه  $(-1, \sqrt{3})$  با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $60^\circ$  می‌سازد؟  
 (۱)  $(-\sqrt{3}, 1)$  (۲)  $(1, -2\sqrt{3})$  (۳)  $(0, 2)$  (۴)  $(-2, 0)$

(کتاب درسی)

۲۸۶ در شکل مقابل، معادله خط  $d$  کدام است؟



$$y + 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (1)$$

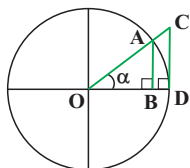
$$y + 3 = \sqrt{3}x \quad (2)$$

$$y - \sqrt{3}x = 3 \quad (3)$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 3 \quad (4)$$



تست‌های بیشتر



۲۸۷ در شکل مقابل، شعاع دایره ۱ واحد است. طول کدام‌یک از پاره‌خط‌های زیر، برابر با هیچ‌یک از نسبت‌های مثلثاتی

(سینوس، کسینوس، تانژانت) زاویه  $\alpha$  نیست؟

- AB (۱)
- OB (۲)
- OC (۳)
- CD (۴)

۲۸۸ تابلویی در جاده نصب شده است که شیب جاده را به صورت  $(۳ : ۱/۷)$  نشان می‌دهد. یعنی هر ۳ متر که به‌طور افقی جلو برویم،  $۱/۷$  متر به ارتفاع جاده افزوده

می‌شود. زاویه‌ای که جاده با افق می‌سازد، تقریباً چه قدر است؟

- $۱۵^\circ$  (۱)
- $۳۰^\circ$  (۲)
- $۴۵^\circ$  (۳)
- $۶۰^\circ$  (۴)

۲۸۹ زاویه کدام خط با جهت مثبت محور  $x$  ها بزرگ‌تر از بقیه است؟

- $2x - 2y = 51$  (۱)
- $\sqrt{3}x - y = 17$  (۲)
- $18x - 10y = 1$  (۳)
- $3x - \sqrt{3}y = 3$  (۴)

۲۹۰ کدام خط با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $30^\circ$  می‌سازد و محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با عرض ۳ قطع می‌کند؟

- $3y - \sqrt{3}x = 9$  (۱)
- $y - \sqrt{3}x = 3$  (۲)
- $3y - \sqrt{3}x = 3$  (۳)
- $y + \sqrt{3}x = 3$  (۴)

۲۹۱ شیب خطی که با جهت مثبت محور  $y$  زاویه  $30^\circ$  می‌سازد، چه قدر است؟

- $1/2$  یا  $1/3$  (۱)
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  یا  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)
- $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  یا  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)
- $-\sqrt{3}$  یا  $\sqrt{3}$  (۴)

۲۹۲ اگر  $\cos 2\alpha > 1/4$  و  $\tan 3\alpha > 1$  باشد، کدام‌یک از مقادیر زیر برای  $\alpha$  مناسب است؟

- $10^\circ$  (۱)
- $12^\circ$  (۲)
- $20^\circ$  (۳)
- $30^\circ$  (۴)

۲۹۳ اگر  $a = \sin 1^\circ$ ،  $b = \cos 1^\circ$  و  $c = \tan 1^\circ$ ، آن‌گاه:

- $a < b < c$  (۱)
- $a < c < b$  (۲)
- $b < c < a$  (۳)
- $c < b < a$  (۴)

تست‌های بیشتر!



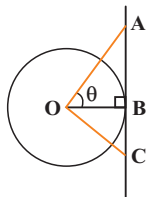
۲۹۴ کدام نقطه روی هیچ کدام از خط‌هایی که از مبدأ گذشته و با خط  $y = x$  زاویه  $15^\circ$  می‌سازد، قرار ندارد؟

- $(\sqrt{3}, 3)$  (۱)
- $(\sqrt{3}, 1)$  (۲)
- $(3, \sqrt{3})$  (۳)
- $(3, 1)$  (۴)

۲۹۵ چند زاویه حاده (بین  $0^\circ$  و  $90^\circ$  درجه) مانند  $\alpha$  وجود دارد طوری که  $(4 \sin^2 \alpha - 9)(4 \sin^2 \alpha - 3)(4 \sin^2 \alpha - 1) = 0$  باشد؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۶ (۴)

۲۹۶ در شکل زیر، شعاع دایره ۱ و مرکز آن  $O$  است. هم‌چنین مثلث  $AOC$  در رأس  $O$  قائمه است. اگر طول پاره‌خط‌های  $OA$  و  $OC$  به ترتیب  $m$  و  $n$  باشد، آن‌گاه:



- $m \cos \theta + n \sin \theta = 1$  (۱)
- $n \cos \theta + m \sin \theta = 1$  (۲)
- $m \cos \theta + n \sin \theta = 2$  (۳)
- $m \tan \theta = n$  (۴)

۲۹۷  $\alpha$  و  $\beta$  وجود دارند طوری که  $\sin 2\alpha \cos 3\beta = m^2 + 1$ . برای  $m$  چند مقدار مختلف وجود دارد؟

- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- بی‌شمار (۴)

۲۹۸ اگر  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ،  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  و  $\frac{\sin \alpha}{3} + \frac{\cos \beta}{4} = \frac{7}{12}$ ، آن‌گاه  $\sin(\alpha + \beta)$  برابر است با:

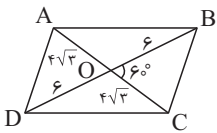
- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- $1/2$  (۳)
- مقادیر مختلفی می‌تواند داشته باشد. (۴)

طبق قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{30} \Rightarrow \frac{0.8}{BC} = \frac{0.5}{30}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{30 \times 0.8}{0.5} = \frac{30 \times 8}{5} = 6 \times 8 = 48 \text{ m}$$

۴/ ۲۵۴ قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند و شکل زیر را

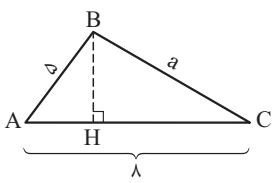


داریم. مساحت مثلث OBC برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

وقتی دو قطر متوازی‌الاضلاع را می‌کشیم، ۴ مثلث با مساحت یکسان ایجاد می‌شود.

پس مساحت متوازی‌الاضلاع برابر می‌شود با:  $4 \times 18 = 72$



مساحت این مثلث ۱۶ واحد سطح شده، پس:

$$S = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} bcsin A = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \sin A = 16 \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$$

اگر ارتفاع BH را رسم کنیم، در مثلث ABH داریم:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{BH}{5} \Rightarrow BH = 4$$

با در نظر گرفتن اعداد فیثاغورسی در مثلث ABH، متوجه می‌شویم که  $AH = 3$ .

$$HC = AC - AH = 8 - 3 = 5$$

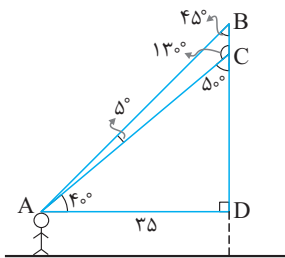
حالا در مثلث BHC فیثاغورس می‌زنیم:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41}$$

۳/ ۲۵۶ در شکل زیر، دنبال BC هستیم!

تمامی زاویه‌ها را مشخص کرده‌ایم و این کار به ما فهماند که مثلث قائم‌الزاویه ABD

متساوی الساقین نیز هست:

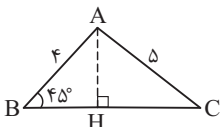


$$\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow BD = AD = 25$$

سؤال چیز خوبی گفته:  $\tan 40^\circ = 0.8$ . پس در مثلث قائم‌الزاویه ADC می‌نویسیم:

$$\tan 40^\circ = \frac{CD}{AD} \Rightarrow 0.8 = \frac{CD}{25} \Rightarrow CD = 20$$

بنابراین ارتفاع مجسمه برابر است با:  $BD - CD = 25 - 20 = 5$



$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \xrightarrow{AH=BH} 2AH^2 = 4^2 \Rightarrow AH^2 = 8$$

$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Rightarrow 8 + CH^2 = 25 \Rightarrow CH = \sqrt{17}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AH}{CH} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{8}{17}}$$

۲/ ۲۴۶ اگر اندازه یک زاویه حاده کم و به صفر نزدیک شود، سینوس و

تانژانت زاویه هم کم شده و به صفر نزدیک می‌شوند اما کسینوس زاویه زیاد شده و به ۱ نزدیک می‌شود.

۲/ ۲۴۷ در زاویه‌های حاده، با افزایش مقدار زاویه، سینوس و تانژانت زیاد

می‌شوند اما کسینوس کم می‌شود. پس:

$$25^\circ < 26^\circ \Rightarrow \sin 25^\circ < \sin 26^\circ$$

$$26^\circ < 27^\circ \Rightarrow \cos 26^\circ > \cos 27^\circ$$

$$27^\circ < 28^\circ \Rightarrow \tan 27^\circ < \tan 28^\circ$$

گزینه چهارم هم درست است، چون  $28^\circ$  و  $62^\circ$  متمم‌اند و در نتیجه سینوس یکی با کسینوس دیگری مساوی است.

$$\sin 20^\circ < \sin 30^\circ \Rightarrow \sin 20^\circ < \frac{1}{2} \quad \text{۴/ ۲۴۸}$$

$$\cos 8^\circ < \cos 3^\circ \Rightarrow \cos 8^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 40^\circ < \tan 45^\circ \Rightarrow \tan 40^\circ < 1$$

$$\tan 25^\circ < \tan 30^\circ \Rightarrow \tan 25^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ \text{ است و } 15^\circ \text{ متمم } 75^\circ \quad \text{۱/ ۲۴۹}$$

$$\frac{\sin 75^\circ \cos 45^\circ}{\tan 60^\circ \cos 15^\circ} = \frac{(\cos 15^\circ) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(\sqrt{3})(\cos 15^\circ)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

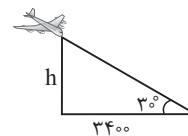
۳/ ۲۵۰ بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست است:  $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$ ، پس  $1^\circ + 89^\circ = 90^\circ$ .

(۲) درست است:  $\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$ ، پس  $49^\circ + 41^\circ = 90^\circ$ .

(۳) نادرست است:  $\tan 2^\circ = \frac{1}{\tan 88^\circ}$ ، پس  $2^\circ + 88^\circ = 90^\circ$ .

(۴) درست است:  $\tan 3^\circ = \frac{1}{\tan 87^\circ}$ ، پس  $3^\circ + 87^\circ = 90^\circ$ .



۳/ ۲۵۱ بفرمایید:

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{h}{3400} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{3400} \Rightarrow h = \frac{3400 \times \sqrt{3}}{3}$$

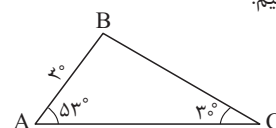
$$3400 = 1/7 \times 2000 \xrightarrow{\sqrt{3} = 1.7} \approx 2000 \times \sqrt{3}$$

$$h = \frac{2000 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{3} = \frac{2000 \times 3}{3} = 2000$$

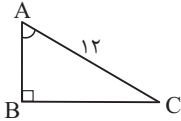
۱/ ۲۵۲ خب با استفاده از فرمول  $S = absin\theta$ ، مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 15 \times 0.96 = 15 \times 0.48 = 7.2 \text{ می‌شود.}$$

۳/ ۲۵۳ شکل ساده‌تری از مسئله رسم کنیم:



باید طول BC را پیدا کنیم.



۴ / ۲۶۳

$$\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\text{ضلع مقابل}}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{ضلع مقابل} = \frac{3 \times 12}{4} = 9$$

یعنی یکی از ضلع‌های مثلث، ۹ سانتی متر است. حالا طبق رابطه فیثاغورس، اگر طول ضلع دیگر را  $x$  بگیریم،  $x^2 + 9^2 = 12^2$  و در نتیجه  $x^2 = 144 - 81 = 63$ ؛ پس  $x = \sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}$   
 $9 + 12 + 3\sqrt{7} = 21 + 3\sqrt{7}$

۳ / ۲۶۴

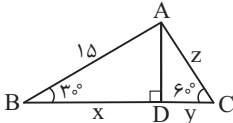
$$(x+y)^2 \sin^2 30^\circ - (x-y)^2 \cos^2 60^\circ = (x+y)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (x-y)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 ((x+y)^2 - (x-y)^2) = \frac{1}{4} (4xy) = xy$$

سؤال گفته حاصل عبارت بالا می‌شود ۳، پس  $xy = 3$ .

محاسبه  $x$ : در مثلث قائم‌الزاویه  $ABD$ ، می‌نویسیم:

۳ / ۲۶۵



$$\cos \hat{B} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15\sqrt{3}}{2} = 7.5\sqrt{3}$$

محاسبه  $y$ : اول،  $AD$  را حساب می‌کنیم! در همان مثلث قائم‌الزاویه  $ABD$ :

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AD}{15}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{2} = 7.5$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویه  $ACD$ :

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{7.5}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{7.5}{\sqrt{3}} = \frac{7.5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{7.5\sqrt{3}}{3} = 2.5\sqrt{3}$$

محاسبه  $Z$ : در همان مثلث قائم‌الزاویه  $ACD$ :

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7.5}{Z}$$

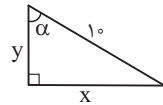
$$\Rightarrow Z = \frac{7.5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

فقط گزینه (۳) حرف درستی می‌زند!

۱ / ۲۶۶

چون  $70^\circ$  و  $20^\circ$  متمم هستند، پس  $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$  می‌دانیم با افزایش زاویه حاده، سینوس هم زیاد می‌شود، پس بین  $A = \sin 11^\circ$  و  $B = \sin 20^\circ$  بزرگتر است. برای  $C$  می‌دانیم  $\tan 45^\circ > \tan 45^\circ$  (چون تانژانت زاویه حاده بزرگتر، بیشتر است) و  $\tan 45^\circ = 1$  پس  $C > 1$ ، سینوس که هرگز بیشتر از یک نمی‌شود، پس  $C$  از  $A$  و  $B$  بیشتر است. خلاصه این‌که  $C > B > A$ .

۲ / ۲۵۸ کاری ندارد که:



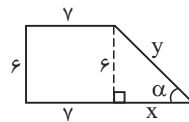
$$\tan \alpha = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3 \Rightarrow x = 3y$$

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow (3y)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 10y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{10}$$

$$x = 3y = 3\sqrt{10}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(3\sqrt{10})(\sqrt{10}) = 15$$

۲ / ۲۵۹ بفرمایید:

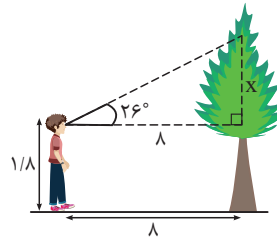


$$\sin \alpha = \frac{6}{y} \Rightarrow 0.6 = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 10$$

$$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{محیط} = 6 + 7 + y + x + 7 = 20 + y + x = 20 + 10 + 8 = 38$$

۳ / ۲۶۰ این‌جا را ببینید:



$$\tan 26^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow 0.48 \approx \frac{x}{8} \Rightarrow x \approx 3.84$$

$$\text{ارتفاع درخت} = 1.8 + 3.84 = 5.64$$

۱ / ۲۶۱ خب اگر  $\theta = 5^\circ$  باشد،  $2\theta = 10^\circ$  و همچنین  $\theta = 25^\circ$  خواهد بود،

پس  $\sin \theta < \sin 2\theta < \sin \theta^2$ . در مورد  $\sin^2 \theta$  هم، چون  $\sin \theta$  بین صفر و یک است، وقتی به توان ۲ می‌رسد، کوچک‌تر می‌شود، یعنی  $\sin^2 \theta < \sin \theta$ . پس  $\sin \theta^2$  از همه بزرگتر است.

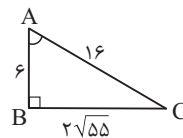
۱ / ۲۶۲

اول، به کمک جناب فیثاغورس، طول ضلع  $BC$  را حساب می‌کنیم تا خیالمان راحت شود که همه چیز را داریم. طبق رابطه فیثاغورس:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2 = 16^2 - 6^2$$

$$= 256 - 36 = 220 \Rightarrow BC = \sqrt{220} = \sqrt{4 \times 55} = 2\sqrt{55}$$

حالا، اصل مطلب:



$$\sin \hat{A} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{55}}{16} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

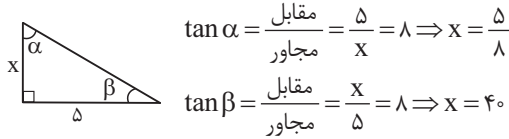
$$\tan \hat{A} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{55}}{6} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

بنابراین:

$$\sin \hat{A} \cos \hat{A} + \tan \hat{A} = \frac{\sqrt{55}}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{55}}{3} = \frac{3\sqrt{55}}{64} + \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$= \frac{73}{192} \sqrt{55}$$

۲ | ۲۷۳ طول ضلع کوچک‌تر زاویه قائمه را  $x$  می‌گیریم.  $\alpha$  و  $\beta$  هم زاویه‌های حاده مثلث‌اند. سؤال گفته تانژانت یکی از زاویه‌های حاده ۸ است، یعنی  $\tan \alpha = 8$  یا  $\tan \beta = 8$ . از طرفی:



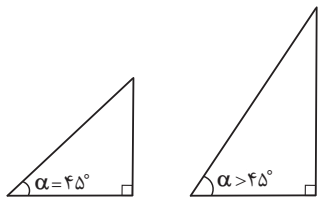
اما  $x = 40$  قابل قبول نیست. چون طول ضلع کوچک‌تر زاویه قائمه است و باید از طول ضلع بزرگ‌تر زاویه قائمه یعنی ۵ کوچک‌تر باشد.  $\frac{5}{8} < 5$ ، پس  $x = \frac{5}{8}$  قابل قبول بوده و طول دو ضلع زاویه قائمه، ۵ و  $\frac{5}{8}$  را می‌خواهیم که همان  $0/625$  است.

۲ | ۲۷۴ می‌دانیم  $0/707 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $0/866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$ . بنابراین  $\frac{2}{3}$ ، بین  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  قرار دارد:  $0/5 < \frac{2}{3} < 0/707$ . پس زاویه  $\theta$  بین  $30^\circ$  و  $45^\circ$  است.

$\theta$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ | ۲۷۵  $\alpha + \beta$  را یک زاویه بگیریم، مثلاً فرض کنید  $\theta = \alpha + \beta$ . در این صورت  $90^\circ = \theta + \gamma$  و در نتیجه  $\theta$  و  $\gamma$  متمم‌اند. پس سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است، یعنی  $\cos \theta = \sin \gamma = \frac{2}{3}$ . پس  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$  چون  $\theta$  همان  $\alpha + \beta$  بود!

۳ | ۲۷۶ وقتی  $90^\circ < \alpha < 45^\circ$  داریم:

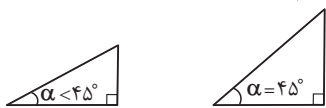


ضلع مقابل  $\alpha$  با ضلع مجاور آن بزرگ‌تر است. مجاور آن مساوی است.

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} > \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \cos \alpha$$

هم‌چنین با توجه به این‌که  $0 < \sin \alpha < 1$  داریم:  $\sin \alpha < \sqrt{\sin \alpha}$ . بنابراین  $\cos \alpha < \sin \alpha < \sqrt{\sin \alpha}$  حواستان باشد که وقتی از اعداد بین صفر و ۱ جذر می‌گیریم، بزرگ‌تر می‌شوند. در مورد  $\sqrt{\cos \alpha} < \sin \alpha < \cos \alpha$  قطعاً  $\cos \alpha < \sin \alpha$ .

۳ | ۲۷۷ وقتی  $0 < \alpha < 45^\circ$  داریم:



ضلع مقابل  $\alpha$  با ضلع مجاور آن مساوی است. مجاور آن کوچکتر است.

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} < \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \cos \alpha$$

هم‌چنین با توجه به این‌که  $0 < \cos \alpha < 1$  داریم:  $\cos \alpha < \sqrt{\cos \alpha}$ . و با توجه به این‌که  $0 < \sin \alpha < 1$  داریم  $\sin^2 \alpha < \sin \alpha$ . بنابراین:

$$\sin^2 \alpha < \sin \alpha < \cos \alpha < \sqrt{\cos \alpha}$$

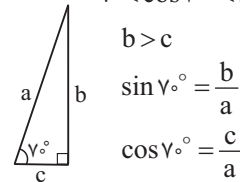
۳ | ۲۶۷  $\sin$  و  $\cos$  حداکثر می‌توانند ۱ باشند، پس بیش‌ترین مقدار این عبارت  $2(1) + 3(1)$  یعنی ۵ است.

۲ | ۲۶۸ بررسی گزینه‌ها:

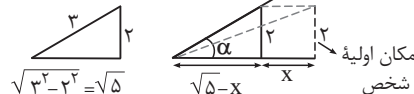
$$1) \frac{2 \cos^2 30^\circ - 2 \sin^2 30^\circ}{2 \tan 45^\circ + 3 \cos^2 60^\circ} = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2(\frac{1}{2})^2}{2(1) + 3(\frac{1}{2})^2} = \frac{3 - 1}{2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$$

$$2) \frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (\sqrt{3})(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0/577$$

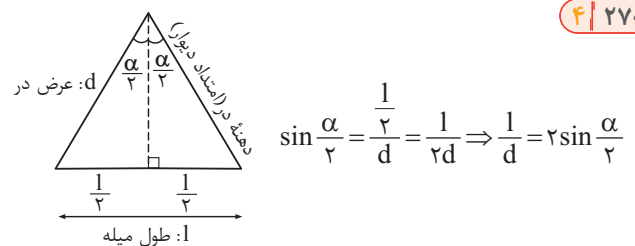
۳) نسبت‌های مثلثاتی  $70^\circ$  را در صورت کسر بلد نیستیم اما لازم‌ش هم نداریم.  $\sin^2 70^\circ$  از  $\cos^2 70^\circ$  بزرگ‌تر است و اختلاف این دو، عددی بین ۰ و ۱ می‌باشد. این اختلاف، نزدیک به  $0/5$  است.  $\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = 0/25$  می‌باشد. مخرج کسر هم برابر  $3 = (\sqrt{3})^2$  است. پس کل کسر تقریباً  $0/2$  می‌باشد و به هر حال از  $0/6$  موجود در گزینه (۲) کوچک‌تر است. حاصل این گزینه عددی منفی است. چون  $0 < \cos 70^\circ < \sin 70^\circ$ .



۳ | ۲۶۹ بفرمایید:



$$\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5-x}} \Rightarrow \sqrt{5-x} = \frac{2}{\tan \alpha} \Rightarrow x = 5 - \frac{4}{\tan^2 \alpha}$$



۳ | ۲۷۱  $\sin 2\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha < \sin 30^\circ \Rightarrow 2\alpha < 30^\circ \Rightarrow \alpha < 15^\circ$

$\tan 5\alpha > 1 \Rightarrow \tan 5\alpha > \tan 45^\circ \Rightarrow 5\alpha > 45^\circ \Rightarrow \alpha > 9^\circ$

پس  $9^\circ < \alpha < 15^\circ$  نمی‌تواند ۸، ۱۶ یا ۲۰ درجه باشد.

۲ | ۲۷۲ تانژانت زاویه‌هایی که متمم یکدیگرند، عکس هم است:

$$\tan 1^\circ = \frac{1}{\tan 89^\circ}, \quad \tan 2^\circ = \frac{1}{\tan 88^\circ}$$

$$\tan 3^\circ = \frac{1}{\tan 87^\circ}, \quad \dots, \quad \tan 44^\circ = \frac{1}{\tan 46^\circ}$$

پس حاصل عبارت موردنظر می‌شود تعدادی ۱ ضرب در  $\tan 45^\circ!$  که می‌شود ۱.

۲۷۸ | ۴

اول یک چیز جالب:  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$  البته  $\sqrt{2}$  از  $1/4$  بزرگتر است، پس  $\sin 45^\circ$  از  $0.7$  بزرگتر است، اما به  $0.8$  نمی‌رسد. حالا با توجه به حاده بودن  $\alpha$  و  $\beta$  داریم:

$$\sin \alpha < 0.7 \Rightarrow \sin \alpha < \sin 45^\circ \Rightarrow 0 < \alpha < 45^\circ$$

$$\cos \beta > 0.8 \Rightarrow \cos \beta > \cos 45^\circ \Rightarrow 0 < \beta < 45^\circ$$

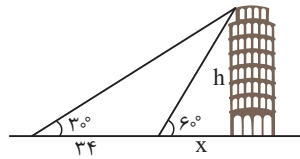
دقت کنید که در زوایای حاده، با افزایش اندازه زاویه، سینوس بیشتر و کسینوس کمتر می‌شود. حالا:

$$0 < \alpha < 45^\circ, 0 < \beta < 45^\circ \Rightarrow 0 < \alpha + \beta < 90^\circ$$

یعنی  $\alpha + \beta$  همیشه حاده است و هیچ‌وقت قائمه (مساوی با  $90^\circ$  درجه) نمی‌شود.

۲۷۹ | ۳

صورت مسئله، شکل زیر را می‌دهد.  $h$  ارتفاع برج است و  $x$  فاصله شناگر تا برج پس از توقف دوم. دو مثلث قائم‌الزاویه هم در شکل دیده می‌شود که برج ضلع مشترک هر دو است، پس می‌توانیم دو رابطه برحسب دو مجهول  $x$  و  $h$  به‌دست آوریم:



$$\tan 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 34^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{h}{34+x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{34+x} \Rightarrow \sqrt{3}(34+x) = 3h$$

حالا نتیجه رابطه اول را در رابطه دوم به‌کار می‌گیریم، یعنی در رابطه دوم، به جای  $x$  قرار می‌دهیم  $\frac{h}{\sqrt{3}}$ ، پس رابطه دوم این شکلی می‌شود:

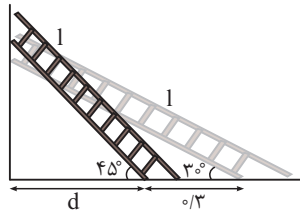
$$\sqrt{3}\left(34 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) = 3h \Rightarrow 34\sqrt{3} + h = 3h \Rightarrow 34\sqrt{3} = 2h$$

$$\Rightarrow h = 17\sqrt{3}$$

می‌توانیم به جای  $\sqrt{3}$  مقدار تقریبی‌اش یعنی  $1.7$  را قرار دهیم و بگوییم ارتفاع برج تقریباً  $28.9$  متر است؛ یا حتی می‌توانیم بگوییم برج تقریباً  $30$  متر است!

۲۸۰ | ۳

صورت مسئله، شکل زیر را می‌دهد:  $l$  طول نردبان است و  $d$  فاصله پای نردبان تا دیوار، قبل از لغزش. در ضمن، ما واحدها را برحسب متر در نظر گرفتیم و همین تصمیم باعث شد  $30$  سانتی‌متر لغزش را روی شکل با  $0.3$  نشان دهیم. حالا از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در شکل می‌بینیم (وتر هر دو، نردبانی به طول  $l$  است!)، دو رابطه به‌دست می‌آوریم. (فهمیدن این‌که برای دست‌یابی به این رابطه‌ها، باید به کسینوس پناه ببریم سخت نیست، چون ما اطلاعاتی از سطح زمین داریم  $(d, 30^\circ)$  و زمین ضلع مجاور زوایای  $45^\circ$  و  $30^\circ$  درجه است.)



$$\cos 45^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{d}{l} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{l} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{d+0.3}{l} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d+0.3}{l} \Rightarrow \sqrt{3}l = 2d+0.6$$

نتیجه رابطه اول را در رابطه دوم می‌گذاریم؛ یعنی در رابطه دوم، به جای  $d$  می‌گذاریم  $\frac{\sqrt{2}}{2} l$ :

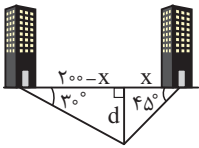
$$\sqrt{3}l = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right) + 0.6 \Rightarrow \sqrt{3}l = \sqrt{2}l + 0.6 \Rightarrow \sqrt{3}l - \sqrt{2}l = 0.6$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})l = 0.6 \Rightarrow l = \frac{0.6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$l = \frac{0.6}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{0.6}{0.3} = 2$$

پس:  $\sqrt{3} \approx 1.7$  و  $\sqrt{2} \approx 1.4$

ما به دنبال  $d$  هستیم (شکل زیر را ببینید). چاره‌ای نداریم جز این‌که در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که می‌بینیم، تانژانت‌ها را بنویسیم:



$$\tan 45^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{d}{x} \Rightarrow 1 = \frac{d}{x} \Rightarrow x = d$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{d}{200-x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{200-x} \xrightarrow{x=d} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{200-d}$$

$$\Rightarrow 200\sqrt{3} - \sqrt{3}d = 3d \Rightarrow 200\sqrt{3} = \sqrt{3}d + 3d$$

$$\Rightarrow d(3 + \sqrt{3}) = 200\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{200\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{3} \approx 1.7} d \approx \frac{200 \times 1.7}{3 + 1.7} = 72$$

شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد، مساوی است. در بین زوایای حاده، زاویه‌ای تانژانت بیشتری دارد که اندازه‌اش بزرگتر باشد. پس بین چند خط که با جهت مثبت محور  $x$  زاویه حاده می‌سازند، خطی شیب بیشتری دارد که زاویه بزرگتری با جهت مثبت محور  $x$  بسازد. خط‌های موردنظر در گزینه‌ها به ترتیب با جهت مثبت محور  $x$  زاویه‌ای  $17^\circ$ ،  $37^\circ = 53^\circ - 90^\circ$  و  $63^\circ$  و  $5^\circ = 13^\circ - 18^\circ$  می‌سازند. بزرگتر از همه است!

۲۸۳ | ۲ بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۳) انتهای کمان مقابل  $\alpha$  در ربع دوم یا سوم قرار دارد و نمی‌توان یکی از این دو ناحیه را با قطعیت انتخاب کرد.

$$2 \text{ و } 4) \quad -\frac{2}{5} \approx -\frac{2}{5} = -\frac{1}{2.5} \quad \text{که } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

می‌باشد (از روی  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  گفتیم). حالا

چون  $-\frac{2}{5} > -\frac{1}{2}$  از  $120^\circ$  بزرگتر است،  $\alpha$  از  $120^\circ$  کوچکتر خواهد بود:  $90^\circ < \alpha < 120^\circ$ .

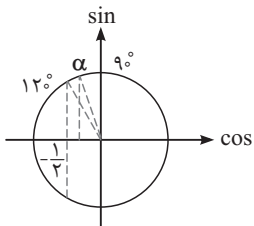
۲۸۴ | ۲ بررسی گزینه‌ها:

۱) درست نیست. در ربع سوم،  $\sin \theta$  منفی و  $\tan \theta$  مثبت است.

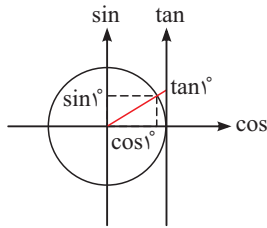
۲) درست است. خوب درست است دیگر!

۳) درست نیست.  $\theta$  در ربع دوم نیز می‌تواند باشد.

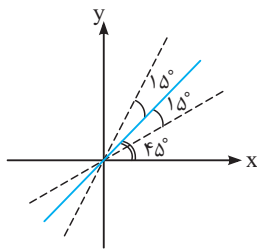
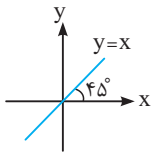
۴) درست نیست. مثلاً قرار دهید  $\theta = 30^\circ$  یا  $\theta = 45^\circ$ .



۲/۲۹۳ از محورهای مثلثاتی کمک می‌گیریم. در شکل، زاویه  $۱^\circ$  بزرگ‌تر از مقیاس واقعی خود نمایش داده شده تا رسم شکل راحت‌تر باشد.  
 $\sin 1^\circ < \tan 1^\circ < \cos 1^\circ$  با توجه به شکل، واضح است که:  
 $a < c < b$  یعنی:



۴/۲۹۴ خط  $y=x$  با محور افقی زاویه  $45^\circ$  دارد.  
 پس اگر بخواهیم با این خط زاویه  $15^\circ$  بسازیم دو حالت داریم:



زاویه این خطها با افق  $45+15$  و  $45-15$  یعنی  $60^\circ$  و  $30^\circ$  درجه است.  
 پس شیب آنها به ترتیب  $\sqrt{3}$  و  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  خواهد بود و چون از مبدأ می‌گذرند، معادله آنها  $y = \sqrt{3}x$  و  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  می‌شود.

**حالا بررسی گزینه‌ها:**

- ۱) نقطه  $(\sqrt{3}, 3)$  روی خط  $y = \sqrt{3}x$  قرار دارد.
- ۲) نقطه  $(\sqrt{3}, 1)$  روی خط  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  قرار دارد.
- ۳) نقطه  $(3, \sqrt{3})$  روی خط  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  قرار دارد.
- ۴) نقطه  $(3, 1)$  روی هیچ‌یک از این دو خط قرار ندارد.

۱/۲۹۵ وقتی حاصل ضرب چند عبارت صفر می‌شود، حداقل یکی از آنها برابر صفر است:

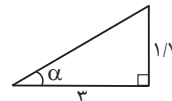
$$\begin{aligned} & (4\sin^2 \alpha - 1)(4\sin^2 \alpha - 3)(4\sin^2 \alpha - 9) = 0 \\ \Rightarrow & 4\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ یا } 4\sin^2 \alpha - 3 = 0 \text{ یا } 4\sin^2 \alpha - 9 = 0 \\ \Rightarrow & \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \text{ یا } \sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \text{ یا } \sin^2 \alpha = \frac{9}{4} \\ \Rightarrow & \sin \alpha = \pm \frac{1}{2} \text{ یا } \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ یا } \sin \alpha = \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

سینوس هر زاویه‌ای بین  $-1$  و  $1$  یا برابر با آن‌هاست، پس  $\sin \alpha = \pm \frac{3}{2}$  را بی‌خیال شوید! هم‌چنین با توجه به حاده بودن  $\alpha$  در این سؤال،  $\sin \alpha$  مثبت است و در نتیجه تنها دو مقدار  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  و  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  قابل قبول هستند. از این‌رو، به ترتیب  $\alpha = 30^\circ$  و  $\alpha = 60^\circ$  به دست می‌آید و زاویه حاده دیگری برای  $\alpha$  موجود نمی‌باشد!

۴/۲۸۵ شیب خط،  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  است و یک نقطه از آن را هم داریم. برویم معادله‌اش را بنویسیم:  
 $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x + 1) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$   
 نقطه  $(-2, 0)$  روی این خط قرار دارد.

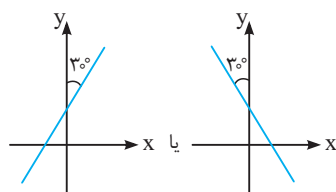
۲/۲۸۶ با توجه به شکل، خط  $d$  با جهت مثبت محور  $x$ ، زاویه  $60^\circ$  می‌سازد. پس شیب آن می‌شود:  
 $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$   
 از طرفی، خط  $d$  از نقطه  $(0, -3)$  عبور می‌کند. پس معادله آن این شکلی می‌شود:  
 $y + 3 = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y + 3 = \sqrt{3}x$   
 آسان است: ۳/۲۸۷

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB, \quad \cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB \\ \tan \alpha &= \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{1} = CD \end{aligned}$$

۲/۲۸۸ آسان است:  
  $\tan \alpha = \frac{1/7}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

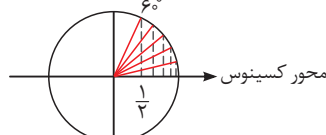
۳/۲۸۹ باید ببینیم شیب کدام خط بیشتر است، شیب چهار خط به ترتیب  $1, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}$  است.  
 $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1/7$  و  $\frac{1}{1} = 1/8$

۱/۲۹۰  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  پس وقتی  $x$  و  $y$  یک طرف تساوی‌اند، نسبت ضرب  $x$  به ضرب  $y$  باید  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد تا شیب خط همان  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  شود! پس گزینه‌های دوم و چهارم رد می‌شوند، نقطه  $(\frac{3}{2}, 0)$  هم باید روی خط باشد، پس گزینه سوم هم منتفی است!

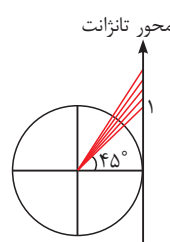


۴/۲۹۱ دو حالت وجود دارد:  
 در هر دو حالت زاویه حاده خط با جهت مثبت یا منفی محور  $x$ ،  $60^\circ$  می‌باشد، اما در شکل سمت راست شیب خط منفی است. پس شیب خط در حالت کلی  $\sqrt{3}$  یا  $-\sqrt{3}$  است یا  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ . چون  $-\sqrt{3}$  است یا  $\sqrt{3}$ .

۳/۲۹۲ خودمان را به زوایای  $0$  تا  $90^\circ$  درجه محدود می‌کنیم.



$$\cos 2\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2\alpha < 60^\circ \Rightarrow 0 < \alpha < 30^\circ$$



$$\tan 3\alpha > 1 \Rightarrow 45^\circ < 3\alpha < 90^\circ \Rightarrow 15^\circ < \alpha < 30^\circ$$

اشتراک حرف‌های بالا می‌شود  $15^\circ < \alpha < 30^\circ$ . به عنوان نمونه،  $\alpha = 20^\circ$  مناسب است.

می توانیم صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت یعنی  $1 + \sin \theta$  ضرب کنیم:

$$\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{(\cos \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{(\cos \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

روش اول (اتحادهای مثلثاتی): **۲ / ۳۰۲**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

سؤال گفته  $\alpha$  در ربع چهارم است، جایی که سینوس منفی است:

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

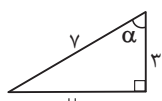
هم چنین:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

در مورد گزینه (۱) دقت کنید که در حالت کلی،  $\cos 2\alpha \neq 2 \cos \alpha$ !

**روش دوم:** مثلث زیر را طوری کشیده‌ایم که در آن  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  شود. در شکل مقابل داریم:



$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{3}{4}$$

البته چون در ربع چهارم، سه نسبت بالا منفی اند باید قرینه آن‌ها را در نظر بگیریم.

**۴ / ۳۰۳** به جای  $1 + \tan^2 x$  می‌نویسیم  $\frac{1}{\cos^2 x}$ :

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

سؤال گفته  $x$  در ربع سوم است ( $180^\circ < x < 270^\circ$ ) و آنجا سینوس منفی است:

$$\frac{1}{|\cos x|} = -\cos x$$

به جای  $\sin 45^\circ$  هم می‌نویسیم  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$$2 \sin^2 45^\circ - \sin^2 x = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

بنابراین:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 45^\circ - \sin^2 x) = \frac{1}{-\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

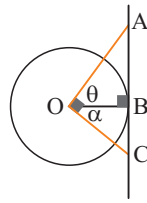
**۱ / ۳۰۴** همان  $1 + \tan^2 x$   $\frac{1}{\cos^2 x}$  است.

در واقع  $\sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$  که چون  $x$  در ربع دوم است (سؤال)

گفته ( $90^\circ < x < 180^\circ$ )، این عبارت مساوی  $\frac{1}{-\cos x}$  می‌شود. به جای  $\tan x$

هم می‌نویسیم  $\frac{\sin x}{\cos x}$

در مثلث قائم‌الزاویه OBA، می‌نویسیم: **۳ / ۲۹۶**



$$\cos \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{m} \Rightarrow m \cos \theta = 1$$

به طور مشابه در مثلث قائم‌الزاویه OBC می‌توان به  $n \cos \alpha = 1$  رسید. از طرفی  $\hat{O} = \alpha + \theta = 90^\circ$  و در واقع  $\alpha$  و  $\theta$  متمم یکدیگرند، پس  $\cos \alpha = \sin \theta$  رابطه  $n \cos \alpha = 1$  به شکل  $n \sin \theta = 1$  نوشته می‌شود. حالا:

$$m \cos \theta + n \sin \theta = 1 + 1 = 2$$

**۲ / ۲۹۷** سینوس و کسینوس حداقل ۱- و حداکثر ۱ هستند:

$$-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos 2\beta \leq 1$$

پس حاصل  $\sin 2\alpha \cos 2\beta$  حداکثر برابر ۱ می‌شود. از طرفی با توجه به نامنفی بودن  $m^2$ ، مقدار  $m^2 + 1$  حداقل برابر ۱ می‌باشد. چه طور چیزی که حداکثر ۱ است، با چیزی که حداقل ۱ است، برابر می‌شود؟ خوب وقتی هر دو دقیقاً برابر ۱ باشند. با این حساب، داریم:

$$m^2 + 1 = 1 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

برای  $m$  فقط یک مقدار وجود دارد. تماماً!

**۲ / ۲۹۸**  $\frac{1}{3}$  به اضافه  $\frac{1}{4}$  می‌شود  $\frac{7}{12}$ . سؤال گفته  $\frac{\sin \alpha}{3}$  به اضافه

$\frac{\cos \beta}{4}$  شده  $\frac{7}{12}$ . پس می‌گوییم  $\sin \alpha = \cos \beta = 1$  و خودمان را راحت می‌کنیم! با

توجه به حدود  $\alpha$  و  $\beta$  که در صورت سؤال مشخص شده، باید گفت  $\alpha = 90^\circ$  و  $\beta = 0^\circ$ . پس  $\alpha + \beta = 90^\circ$  و در نتیجه:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin 90^\circ = 1$$

**۴ / ۲۹۹** هر سه رابطه درست‌اند. ببینید:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \tan 15^\circ$$

$$1 + \tan^2 5^\circ = \frac{1}{\cos^2 5^\circ} = \frac{1}{\sin^2 40^\circ} \Rightarrow \sin^2 40^\circ (1 + \tan^2 5^\circ) = 1$$

$$\frac{\tan^2 20^\circ}{\cos^2 70^\circ} = \frac{\tan^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ} \times \frac{1}{\sin^2 20^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} = 1 + \tan^2 20^\circ$$

**۲ / ۳۰۰** کاری ندارد که! به جای  $\cos^2 10^\circ$  در صورت کسر، می‌نویسیم

$$(1 - \sin^2 10^\circ) (1 + \sin 10^\circ)$$

تمام!

$$1 - \frac{\cos^2 10^\circ}{1 + \sin 10^\circ} = 1 - \frac{1 - \sin^2 10^\circ}{1 + \sin 10^\circ} = 1 - \frac{(1 - \sin 10^\circ)(1 + \sin 10^\circ)}{1 + \sin 10^\circ}$$

$$= 1 - 1 + \sin 10^\circ = \sin 10^\circ$$

این را در گزینه‌ها نمی‌بینیم.  $80^\circ$  متمم  $10^\circ$  است ( $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$ ) پس سینوس یکی با کسینوس دیگری مساوی است:

$$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$$

**۳ / ۳۰۱** می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$